

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ИНСТИТУТ ТЕХНОЛОГИЙ (ФИЛИАЛ) ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО**

**УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

«**ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**В Г. ВОЛГОДОНСКЕ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ**

**(ИТ (филиал) ДГТУ в г. Волгодонске)**

Факультет «Технологии и менеджмент»

Кафедра «Экономика и управление»

**Исследование операций в экономике**

***Методические рекомендации к самостоятельной работе***

***студентов очно-заочной формы обучения***

***направления подготовки***

***38.03.02 Менеджмент***

Волгодонск 2024

# Оглавление

[Предисловие 5](#_TOC_250015)

Глава I. ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

В ЭКОНОМИКЕ 7

* 1. Проблема принятия решений и её эволюция 7
  2. [Основные понятия исследования операций 12](#_TOC_250014)
  3. [Исследование операций как научная дисциплина 18](#_TOC_250013)
  4. [Виды задач исследования операций 24](#_TOC_250012)
  5. [Прямые и обратные задачи исследования операций . 27](#_TOC_250011)

[Практические задания 29](#_TOC_250010)

Глава II. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ 30

* 1. [Графический метод решения задач линейного про- граммирования 33](#_TOC_250009)
  2. [Симплекс-метод решения задач линейного про- граммирования 51](#_TOC_250008)
  3. Решение ЗЛП в приложении Excel MS Office 66

[Практические задания 81](#_TOC_250007)

Глава III. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ 89

* 1. [Двойственная задача 89](#_TOC_250006)
  2. [Транспортная задача 108](#_TOC_250005)
  3. [Задача о назначениях 122](#_TOC_250004)

[Практические задания 127](#_TOC_250003)

Глава IV. МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ 136

* 1. [Задачи и методы динамического программирования 136](#_TOC_250002)
  2. [Сетевые графики динамических задач 138](#_TOC_250001)

[Практические задания 148](#_TOC_250000)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Глава V. | СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ …………. | 151 |
|  | * 1. Системы массового обслуживания с отказами ……..   2. Системы массового обслуживания с неограничен- ной очередью …………………………………………. | 156  160 |
|  | 5.3. Системы массового обслуживания с ограниченной  очередью ……………………………………………… | 168 |
|  | *Практические задания* ………………………………. | 170 |
| Глава VI. | ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР ………………………………... | 174 |
|  | 6.1. Предмет и задачи теории игр ………………………... | 174 |
|  | 6.2. Решение матричной игры в чистых стратегиях ……. | 180 |
|  | 6.3. Решение матричной игры в смешанных стратегиях . | 184 |
|  | * 1. Решение игр графическим методом …………………   2. Сведение матричной игры к задаче линейного про- граммирования ……………………………………….. | 187  197 |
|  | 6.6. Игры с природой …………………………………….. | 206 |
|  | *Практические задания* ………………………………. | 211 |
| Литература | ……………………………………………………………….. | 216 |

# Предисловие

Методы исследования операций в экономике, возможности применения которых существенно расширились благодаря современ- ному программному обеспечению ПЭВМ, представляют собой один из наиболее динамично развивающихся разделов прикладной эконо- мической науки. Современный экономист должен хорошо разбирать- ся в экономико-математических моделях оптимизации, уметь моде- лировать реальные экономические ситуации и принимать рациональ- ные решения.

В учебном пособии излагаются методы экономико-матема- тического моделирования, которые широко используются в различ- ных областях экономики, при принятии управленческих решений в финансовой сфере в силу разработанности математического аппарата и возможности практической реализации.

Пособие состоит из шести глав, которые разделены на параграфы. Первая глава посвящена методологическим основам дисципли-

ны «Исследование операций в экономике». В ней изложены эволю- ция проблемы принятия решений, основные понятия исследования операций, история развития исследования операций как научной дис- циплины, приведены примеры прямых и обратных задач исследова- ния операций.

Во второй главе рассмотрены основные методы решения линей- ных задач исследования операций: графический метод, симплексный метод, а также использование возможностей приложения Excel. Зна- чительное место отведено алгоритму формирования экономико- математических моделей, анализу на чувствительность оптимального плана к изменению запаса ресурсов, а также экономической интер- претации полученных результатов.

В третьей главе рассмотрены особенности решения и анализа специальных задач исследования операций в экономике. Подробно из- ложены двойственная задача, транспортная и задача о назначениях.

Четвертая глава посвящена моделям динамического программи- рования. В ней приведены задачи и методы динамического програм-

мирования. Построение сетевых графиков динамических задач эко- номически обосновывается необходимостью календарного планиро- вания на предприятии.

В пятой главе значительное место отведено использованию ап- парата теории массового обслуживания для решения финансово- экономических задач.

В шестой главе рассматриваются элементы теории игр.

Наряду со сведениями теоретического характера, в пособии разбирается большое количество примеров и задач, цель которых – уяснение основных понятий и методов исследования операций. В конце каждой главы приведены задачи для самостоятельного реше- ния. Они подобраны и составлены с особой тщательностью и могут служить для проверки степени усвоения читателем изученного мате- риала. Примеры и задачи предусматривают небольшой объем вычис- лений и могут быть использованы на практических занятиях при изу- чении дисциплины «Исследование операций в экономике».

Дополнительные теоретические сведения для более глубокого изучения того или иного раздела можно получить из приведенной в конце пособия рекомендуемой литературы. Изучение всех разделов исследования операций в экономике, излагаемых авторами в учебном пособии, предусмотрено Государственным образовательным стан- дартом по экономическим специальностям.

Пособие написано на основе опыта преподавания исследования операций в экономике в высших учебных заведениях, а также на ос- нове решения ряда практических задач, которые встречались авторам в научно-исследовательской работе.

# Глава 1. ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

* 1. **Проблема принятия решения и ее эволюция**

Процесс принятия решения не нов – им интересовались еще жрецы и мудрецы глубокой древности, светила античных времен, его изучают и современные ученые. За всю историю своего существова- ния люди пользовались различными способами принятия решения. Поэтому неудивительно, что с древних времен до настоящего време- ни проблемы решения входят в число актуальных проблем науки. При этом наибольшее внимание обращается на решение нестандартных задач, которые носят творческий характер. Информационные источ- ники, дошедшие до нас с древнейших времен, свидетельствуют, что уже тогда людей волновал вопрос, каким образом происходит приня- тие решения, особенно творческого, каков рациональный путь к вы- бору правильного поступка при новых, ранее не встречавшихся об- стоятельствах, каким образом люди создают новое и полезное. На- пример, известно пособие по принятию решения, которое написал около четырех тысяч лет назад в Китае И. Чинг. Это пособие явилось оригинальным руководством в творческой работе. По мнению неко- торых зарубежных специалистов (Ф.Д. Баррет и др.), известный трак- тат не потерял своего значения до наших дней и может быть рекомен- дован современным хозяйственным руководителям и политическим деятелям (речь идет об управлении производством).

Несомненно, в те далекие времена научные данные о природе творческой деятельности, творческих решений были настолько скуд- ны, что они не могли дать людям правильного объяснения этих про- цессов. Не находя правильного ответа на вопросы, люди объясняли их мистически. Так, древние греки и другие народы античного мира объ- ясняли как силы природы, так и творческие способности их божест- венным происхождением. При таком объяснении основным орудием управления процессом принятия решения в неопределенных обстоя- тельствах или процессами творчества были молитвы музам – богиням

творчества. Однако и в те далекие времена люди искали более рацио- нальные пути улучшения процесса принятия решения, особенно для таких случаев, когда было неизвестно, как изменятся обстоятельства. В ту пору предсказаниями будущего славился греческий город Дель- фы со своим оракулом. Вкратце суть этих предсказаний такова. Сна- чала с обстоятельствами дела досконально знакомились дельфийские жрецы. Затем они наблюдали за прорицательницей (Пифией), одур- маненной выходящими из земли газами. Пифия выкрикивала отдель- ные слова и бессвязные фразы, вызывавшие у жрецов ассоциации, на основе которых они предсказывали будущее. Предсказание передава- лось заинтересованному лицу или обнародовалось только после тща- тельного его обсуждения на совете. Несмотря на многовековую исто- рию изучения процесса решения и его принятия, термин «принятие решения» появился в научной литературе в 30-е годы XX-го столетия – в творческих работах по управлению частным производством для ха- рактеристики процессов децентрализации управления.

Современный этап развития науки управления характеризуется интенсивным поиском новых идей, подходов, методов и средств, спо- собных повысить эффективность управления сложными социально- экономическими системами в условиях все возрастающего динамизма процессов, усложнения связей в системах и все более жесткого огра- ничения ресурсов.

Одним из перспективных подходов является рассмотрение про- блем управления с позиций принятия решений. Этот подход, связан- ный с использованием таких категорий, как «решение», «процесс принятия решений», «система принятия решений», в литературе на- зывают концепцией принятия решений, теорией принятия решений, школой принятия решений. Актуальность и практическая ценность выделения и изучения проблем принятия решений в процессе управ- ления определяются следующими причинами.

Во-первых, принятие решений занимает центральное место в процессе управления. Как известно, принятие решений наряду с про- гнозированием, планированием, оценкой обстановки, исполнением

решений, контролем и учетом является функцией управления. Цен- тральная, важнейшая роль принятия решений определяется тем, что все другие функции управления направлены на формирование или реализацию решений. Кроме того, любую функцию управления тех- нологически можно представить в виде последовательности решений. Например, при прогнозировании и планировании принимаются реше- ния, связанные с выбором методов и средств, организацией работ, оценкой достоверности информации, выбором наиболее достоверного варианта прогноза и наилучшего варианта плана. Аналогичную це- почку решений можно построить и при рассмотрении других функ- ций управления. Таким образом, функция принятия решений является с методологической и технологической точек зрения более общей, чем другие функции управления, поэтому в литературе иногда управ- ление рассматривается как процесс принятия решений.

Во-вторых, принятие решений – это личная функция руководи- теля. Для руководителя любого ранга принятие решений является ос- новной задачей, которую он обязан решать в процессе управления. Поэтому знание методов, технологии и средств решения этой задачи является необходимым элементом квалификации руководителя.

В-третьих, современной моделью функционирования организа- ционных систем является система принятия решений. Эта модель со- гласует положительные стороны двух предшествующих теоретиче- ских моделей, имеющих структурно описательный характер: механи- ческой модели организации как «полностью рациональной» системы; естественной модели организации как «живой» социальной системы. Система принятия решений является третьей моделью организацион- ных систем, в которой как первичный элемент рассматривается «ре- шение». Основное развитие эта модель получила на рубеже 60-х го- дов прошедшего века. В данной модели рассматриваются рациональ- ные принципы механической модели с учетом социальной и психоло- гической специфики естественной модели. В решении объединяются объективные факторы информационного анализа проблем, проводи- мого на основе логического мышления, математических методов и

ЭВМ, и субъективные психологические факторы лица, принимающе- го решение. Поэтому система принятия решений позволяет осущест- вить системный подход к исследованию сложных организационных систем, включающий социально-технологическую форму реализации процессов управления.

В-четвертых, подход, ориентированный на принятие решений, создает прочную базу для дальнейшего совершенствования автомати- зированных систем информационного обеспечения и управления. Эти системы должны развиваться от автоматизации трудоемких рутинных учетно-расчетных задач до логико-аналитических задач формирова- ния и обоснования вариантов решений. Рассмотрение организацион- ной системы принятия решений, выделение в ней центров принятия решений, формирование информационных потоков, соответствующей структуры и их динамической перестройки в зависимости от решае- мых проблем являются перспективным направлением совершенство- вания управления сложными социально-экономическими системами. Изложенное показывает, что изучение проблем управления с единой методологической позиции принятия решений позволяет практически осуществить комплексный, системный подход к анализу функциони- рования организационных систем, технологии их управления, приме- нению современных методов и технических средств.

В настоящее время существует достаточно большое число со- временных научных дисциплин, посвященных проблеме принятия решений. К таким дисциплинам можно отнести и исследование опе- раций. Ситуацию, в которой происходит принятие решений, в общем случае характеризуют следующие основные черты.

1. Наличие цели (целей). Необходимость принятия решения диктуется наличием некоторой цели, которую нужно достичь, напри- мер выполнить плановое задание, выбрать тип прибора, назначить план перевозок и т. д. Если же цель не поставлена, то не возникает и необходимость принимать какое-либо решение.
2. Наличие альтернативных линий поведения. Решения прини- маются в условиях, когда существует более одного способа достиже- ния цели, или иначе, несколько альтернатив достижения цели. С раз-

личными альтернативами могут быть связаны различные затраты и разные вероятности достижения цели. Эти затраты и вероятности не всегда могут быть определены. Поэтому часто принятие решений со- пряжено с неясностью и неопределенностью. Если же существует лишь одна линия поведения, то выбора нет и, следовательно, решение принимать не требуется: оно очевидно.

1. Наличие ограничивающих факторов. Решения обычно прини- маются в условиях действия большого числа факторов, ограничи- вающих возможность выбора способов действий. Эти факторы назы- вают дисциплинирующими условиями.

Факторы, подлежащие учёту, можно условно разделить на три основные группы: экономические, технические и специальные.

Под экономическими факторами понимают факторы, связанные с ресурсами: время, денежные средства, трудовые ресурсы, производ- ственные возможности и т. п. К техническим факторам обычно отно- сят факторы, которые непосредственно связаны с инженерным анали- зом и выработкой требований к техническим характеристикам объек- тов: габаритам, массе, прочности, надежности и т. п. Наконец, соци- альные факторы, в том числе и чисто человеческие, выражают требо- вания не только политической или социальной целесообразности осуществления той или иной альтернативы, но и этики. Все перечис- ленные факторы накладывают ограничения на возможности достиже- ния поставленной цели.

Очевидно, что отсутствие ограничений существенно упрощает задачу принятия решения. Таким образом, задача принятия решения (ЗПР) возникает в том и только в том случае, когда существует цель, которую нужно достичь, когда возможны различные способы ее дос- тижения и существуют факторы, ограничивающие возможности дос- тижения цели. Выяснение всех трех указанных элементов задачи при- нятия решений должно обязательно предшествовать её непосредст- венному решению.

Во всех случаях задача принятия решений направлена на опре- деление наилучшего (оптимального) или приемлемого способа дейст- вий для достижения одной или нескольких целей. Под целью понима- ется в широком смысле идеальное представление желаемого состоя-

ния или результата деятельности. Если фактическое состояние не со- ответствует желаемому состоянию, то имеет место проблемная си- туация или проблема, выработка плана устранения которой и состав- ляет сущность задачи принятия решений. Конечным результатом ЗПР является решение. Решение можно рассматривать как предписание к действию. С точки зрения содержания решением может быть страте- гия управления экономической системой, способ действия, план ра- боты, вариант инновационного проекта.

# Основные понятия исследования операций

Одним из основных понятий теории принятия решений является операция. Под термином «операция» следует понимать организован- ную деятельность в любой области жизни, объединенную единым за- мыслом, направленную на достижение определенной цели, имеющую характер повторяемости.

В дальнейшем операцией будем называть управляемое меро- приятие, систему действий, объединённых единым замыслом, и на- правленное на достижение какой-либо конкретной цели.

В данных формулировках подчеркиваются две особенности операции: **её целевая направленность и повторяемость**. Именно отсюда возникает возможность проводить исследования, касающиеся количественных сторон операции, общими научными путями с ис- пользованием методов теории вероятностей, статистики и данных различных наук – физики, биологии, техники, экономического анали- за и др.

Укажем примеры операций:

а) производственная деятельность отрасли, выпускающей неко- торую народнохозяйственную продукцию;

б) формирование портфеля заказов фирмы;

в) разработка плана транспортных перевозок материальных средств;

г) совокупность мероприятий, направленных на реализацию бизнес-плана и т. д. Изучение операций может проводиться как путем исследования оригинала самой операции, так и путем исследования

модели операции. Основным методом исследования операций, осо- бенно крупного масштаба, является метод моделирования. Получить *аналитическое описание* операции удаётся только в самых простых случаях. *Постановка специальных экспериментов* на реальных эко- номических системах с целью выбора оптимальных решений обычно сложна, связана с большими расходами и непредсказуемыми послед- ствиями или просто нереальна. На практике значительно проще и ра- циональнее изучить закономерности и построить приближённую ма- тематическую модель экономического процесса и на основе изучения модели выбрать лучшее решение, отвечающее множеству нередко противоречивых требований и условий. Таким образом, основной ме- тод изучения операций крупного масштаба – исследование моделей операции, главным образом, моделей математических.

Второе важное понятие исследования операций – оперирующая сторона. Совокупность лиц, которые стремятся в данной операции к достижению некоторой цели, а также технических устройств, с по- мощью которых цель достигается, называется оперирующей сторо- ной. В операции могут участвовать одна или несколько оперирующих сторон, преследующих различные, несовпадающие цели. Несовпаде- ние целей оперирующих сторон создаёт конфликтную ситуацию. По- добные операции называются многосторонними или конфликтными. Так, например, в торговле исход операции зависит от деятельности двух сторон, преследующих противоположные цели: фирмы, стремя- щейся продать товар с прибылью, организации, приобретающей товар заданного качества по минимальной цене.

Наряду с оперирующими сторонами в операции могут участво- вать арбитры и природные силы, поведение которых в явном виде не подчинено стремлению к достижению цели операции. Для достиже- ния цели оперирующая сторона должна располагать некоторым запа- сом активных средств (ресурсов), используя или расходуя которые, она может добиваться достижения цели. В качестве ресурсов в зави- симости от сущности операции могут выступать: запасы сырья, рабо-

чая сила, денежные средства, информационные и интеллектуальные ресурсы, торговые площади и т. п.

Операция является управляемым мероприятием. Оперирующая сторона управляет операцией, выбирая те или иные способы исполь- зования ресурсов – способ действий. В качестве синонимов термина

«способ действия» часто используют следующие термины: альтерна- тива, стратегия, управление, решение.

Возможности оперирующей стороны по управлению операцией всегда ограничены рядом естественных причин. Этот факт проявляет- ся в наличии ограничений – дисциплинирующих условий – на выбор способов действий оперирующей стороны – стратегий. Стратегии, удовлетворяющие наложенным ограничениям, называются всевоз- можными или допустимыми (в смысле заданных ограничений). Поня- тие «допустимые стратегии» является относительным: класс допус- тимых стратегий определяется наложенными ограничениями и изме- няется, если изменяются ограничения. Реализация той или иной до- пустимой стратегии оперирующей стороны обычно приводит к раз- личным исходам операции.

Чтобы сравнивать между собой качество различных стратегий, нужно иметь возможность оценивать соответствующие исходы опе- раций. Исход операции оценивается с помощью некоторых критериев качества – критериев эффективности или критериев оптимальности.

Критерий оптимальности является математическим выражением цели операции (математической моделью цели операции), позволяю- щим количественно определить степень достижения этой цели. Стра- тегия, наилучшая в смысле выбранного критерия оптимальности, т. е. доставляющая ему требуемое экстремальное (максимальное или ми- нимальное) значение, называется оптимальной стратегией. Синони- мами этого термина являются «оптимальное решение», «оптимальное управление» и т. п.

Следует иметь в виду, что понятие «оптимальная стратегия» яв- ляется не абсолютным, а относительным, как и понятие «допустимая стратегия». Не существует оптимальной стратегии вообще, всякая оп-

тимальная стратегия является наилучшей лишь в некотором узком, совершенно конкретном смысле, определенном критерием оптималь- ности. Одна и та же стратегия, оптимальная в смысле одного крите- рия, может оказаться далеко не оптимальной и даже очень плохой по другому критерию. Поскольку значение критерия оптимальности в любой операции зависит от каких-либо величин, описывающих свой- ства операции, используемые ресурсы и т. д., то критерий оптималь- ности часто называют также критериальной или целевой функцией (функцией эффективности).

Следующее важное понятие исследования операций – исследо- ватель операции. В составе оперирующей стороны специально выде- ляется и занимает особое место исследователь операции, или опера- ционист. Он принадлежит к оперирующей стороне и должен пресле- довать ту же цель, что и оперирующая сторона. Однако операционист не принимает окончательных решений по выбору способов действий, а лишь помогает в этом оперирующей стороне, предоставляя ей коли- чественные основания для принятия решений. Иными словами, ис- следователь операции имеет право не решающего, а лишь совеща- тельного голоса. Естественно, что поэтому он не должен нести ответ- ственность за принятые решения и последствия от реализации пред- принятых действий.

Суть работы исследователя операции состоит в детальном изу- чении сущности и специфики решаемой проблемы, определении все- го набора допустимых стратегий, оценке их качества, сравнении их между собой и определении оптимальной стратегии. Исследование операции завершается рекомендациями по выбору оптимальной стра- тегии. Само же принятие решения, т. е. окончательный выбор страте- гии и её реализация, выходит за рамки исследования и относится к компетенции ответственного лица – руководителя операции.

Уточним содержание исследований, формирующих процесс принятия решений. Процессы принятия решений, реализуемые в са- мых различных сферах деятельности, имеют очень много общего, поэтому желательно создать некоторую универсальную, типовую схему, устанавливающую наиболее целесообразный набор и последо-

вательность действий, проводимых при исследовании операций. В работах многих авторов по исследованию операций, системному анализу, управлению производством содержатся рекомендации по формированию состава и последовательности исследований в процес- се принятия решений. На основе анализа и обобщения этих рекомен- даций можно предложить следующий алгоритм типового процесса принятия решений:

1. предварительное формулирование проблемы;
2. определение целей операции и выбор соответствующих кри- териев оптимальности;
3. выявление и формулирование дисциплинирующих условий;
4. составление возможно более полного списка альтернатив и предварительный их анализ с целью отбрасывания явно неэффектив- ных;
5. сбор необходимой информации и прогнозирование изменений параметров операции в будущем;
6. точное формулирование постановки задачи;
7. разработка математической модели операции, позволяющая оценивать эффективность каждой альтернативы;
8. выбор метода решения задачи и разработка алгоритма реше-

ния;

1. оценка альтернатив и определение наиболее эффективных;
2. принятие решения ответственным руководителем;
3. выполнение решения и оценка результатов.

Процесс принятия решений является сложной итеративной цик-

лической процедурой. Действительно, результат практически любого этапа исследований может повлиять на постановку задачи и привести к её изменению. В частности, даже практическое опробование принятого решения, если оно дает нежелательный результат, также является сти- мулом к пересмотру постановки задачи и поиску новых решений.

Так, в процессе принятия решений осуществляется преобразо- вание информации. На различных этапах процесса принятия решений происходит количественная и качественная переработка исходной информации с целью получения новой информации, концентрирован-

ное выражение которой находит свое отражение в решении. Перера- ботка информации происходит в виде последовательных трёх фаз, для каждой из которых характерен свой уровень определенности решения задачи:

* 1. структуризация;
  2. характеризация;
  3. оптимизация.

Структуризация заключается в выделении основных элементов решаемой задачи и установлении отношений между ними. В резуль- тате структуризации образуется логически упорядоченная система, позволяющая определить необходимую информацию и распределить её по элементам структуры. Результат структуризации отображается в виде схем, таблиц или формальной символической записи. Примера- ми структуризации являются построение дерева целей, формирование множества альтернативных решений и способов их реализации, уста- новление взаимосвязанной системы гипотез о возможных событиях.

Характеризация заключается в определении системы характери- стик, параметров и показателей, количественно описывающих решае- мую задачу. Например, для дерева целей могут быть определены при- оритеты, или относительные коэффициенты важности целей: для множества решений – предпочтения (полезности), для гипотез о воз- можных событиях – вероятности их свершения. Выполнение характе- ризации приводит к более полному и точному описанию решаемой задачи по сравнению с фазой структуризации и подготавливает ис- ходные данные для выполнения оптимизации.

Оптимизация представляет собой поиск наилучшего решения задачи. Именно на этой фазе вся имеющаяся информация преобразу- ется в конечную форму, описывающую решение и показывающую, как зависят характеристики решения от исходных данных. Проведе- ние оптимизации приводит к полной определенности решения задачи. Для решения задач в условиях неопределенности не всегда воз- можно проведение фазы оптимизации в строго формальном виде. Во многих случаях лицо, принимающее решение, осуществляет оптими-

зацию в неявном виде, опираясь на некоторые общие принципы, про- фессиональный опыт и свои предположения.

Процесс принятия решения требует полноценного информаци- онного обеспечения, которое предполагает использование как имею- щейся информации (априорной информации), так и получение, добы- вание с помощью экспериментов (опытов) новой послеопытной (апо- стериорной) информации.

Обобщенной характеристикой решения является эффективность решения. Эта характеристика включает эффект решения, определяю- щий степень достижения целей и стоимость решения – совокупность затрат ресурсов для принятия и реализации решения. Эффективность решения – это степень достижения целей, отнесенная к затратам на их достижение. Решение тем эффективнее, чем выше степень достиже- ния целей и ниже стоимость затрат.

Система принятия решений – организованная совокупность лю- дей, методов, технических средств, информации и технологии приня- тия решений для достижения поставленных целей.

# Исследование операций как научная дисциплина

Исследование операций представляет собой научный метод вы- работки количественно обоснованных рекомендаций по принятию решений.

Учитывая важность количественного фактора в исследовании операций и целенаправленность вырабатываемых рекомендаций, ис- следование операций можно определить как теорию обоснования оп- тимальных решений.

Несмотря на различную природу, операции могут быть описаны одними и теми же математическими моделями, более того, анализ этих моделей позволяет лучше понять суть того или иного явления и даже предсказать его дальнейшее развитие. Окружающий мир устро- ен (в информационном смысле) необычайно компактно, поскольку одна и та же информационная схема используется в самых различных физических (или других) проявлениях.

Благодаря наличию общих закономерностей в развитии самых различных систем их исследование возможно на основе математиче- ских методов. Исследование операций сегодня рассматривается как математический инструментарий, поддерживающий процесс приня- тия решений в разных областях человеческой деятельности, как сово- купность методических средств, позволяющих обеспечить лицо, при- нимающее решение, необходимой количественной информацией, по- лученной научными методами.

Исследование операций как научная дисциплина сформирова- лось на стыке математики и разнообразных социально-экономических дисциплин, и поэтому свой вклад в его становление внесли предста- вители самых различных областей наук.

История возникновения исследования операций уходит корнями в далёкое прошлое. Так, ещё в 1885 году Фредерик Тейлор пришёл к выводу о возможности применения научного анализа в сфере произ- водства. Проблема, рассмотренная им, на первый взгляд, кажется тривиальной: «как оптимизировать работу землекопов?». Применение математического аппарата подтвердило несостоятельность принципа

«Бери больше, кидай дальше и отдыхай, пока летит». Оказалось, что оптимальный вес грунта, позволяющий максимизировать количество перебрасываемого материала (при разумной экономии рабочей силы) в случае продолжительной работы, значительно меньше того, что мо- жет поднять человек при максимальной нагрузке.

Пионером в области перевода сложных военно-стратеги- ческих задач на язык математики стал Фредерик Ланчестер. Одним из наиболее значительных результатов, полученных учёным, стало от- крытие в 1916 г. так называемого квадратичного закона, количествен- но связывающего достижение победы с двумя основными факторами: численным превосходством живой силы и эффективностью оружия. Было доказано, что при одновременном вступлении в бой численное превосходство в живой силе более важно, чем применение более со- вершенного вооружения, поскольку главную роль играет сосредото- чение собственных войск и расчленение сил противника. Классиче-

ским примером использования квадратичного закона Ланчестера яв- ляется победоносная тактика адмирала Нельсона в сражении при Трафальгаре.

В 1917 г. датский математик А.К. Эрланг, работавший в теле- фонной компании, сформулировал задачу минимизации потерь вре- мени на установление телефонной связи. Полученные им результаты стали основополагающими принципами в теории телефонных сетей. Позднее формулы Эрланга (среднее время ожидания заявки вызова и др.) были приняты министерством связи Англии в качестве стандарта для расчёта эффективности телефонных соединений. Идеи Эрланга почти на полвека предвосхитили современные теории расчёта харак- теристик телефонных узлов.

В 1930 г. Г. Левинсон начал применять научный анализ к реше- нию задач, возникающих в торговле. Методика исследования опера- ций была использована для эффективности рекламы, размещения то- варов, влияния конъюнктуры на номенклатуру и количества продан- ных товаров.

В годы Второй мировой войны исследование операций широко применялось для планирования боевых действий. Так, специалисты по исследованию операций работали в штабе командования бомбар- дировочной операции США, дислоцированном в Англии. Ими иссле- довались многочисленные факторы, влияющие на эффективность бомбометания. Были выработаны рекомендации, приведшие к 4-кратному повышению эффективности бомбардировок. В начале войны боевое патрулирование самолётов союзников для обнаружения кораблей и подводных лодок противника носило неорганизованный характер. Привлечение специалистов по исследованию операций по- зволило установить такие маршруты патрулирования и такое распи- сание полётов, при которых вероятность оставить объект незамечен- ным была сведена до минимума. Полученные рекомендации были применены для организации патрулирования над Южной частью Атлантического океана с целью перехвата немецких кораблей с воен- ными грузами. Из пяти вражеских кораблей, прорвавших блокаду, три были перехвачены на пути из Японии в Германию, один был обнару-

жен и уничтожен в Бискайском заливе и лишь одному кораблю уда- лось скрыться благодаря тщательной маскировке. В годы войны все работы по использованию методов исследования операций были за- секречены. По окончании Второй мировой войны группы специали- стов по исследованию операций продолжили свою работу в ВС США и Великобритании.

Публикации ряда результатов вызвали всплеск общественного интереса к этому научному направлению. Возникла тенденция к при- менению методов исследования операций в коммерческой деятельно- сти, в целях реорганизации производства, перевода промышленности на мирные рельсы. Сегодня на развитие математических методов ис- следования операций в экономике ассигнуются миллионы долларов.

Термин «исследование операций» возник в результате букваль- ного перевода с английского выражения оperations research, введенно- го в конце 30-х годов XX века как условное наименование одного из подразделений британских ВВС, занимавшегося вопросами эффек- тивного использования радиолокационных систем в общей системе противовоздушной обороны. Первоначально исследование операций (ИО) было связано с решением задач военного содержания, но уже с конца 40-х годов оно используется для решения технико-экономичес- ких задач и задач управления на различных уровнях. В 50-60-е годы на Западе создаются научные общества и центры исследования опе- раций, выпускающие научные журналы, а ряд американских универ- ситетов включает эту дисциплину в свои учебные планы.

В рамках исследования операций начинают формироваться от- дельные самостоятельные направления – линейное программирова- ние, выпуклое программирование, теория игр, теория массового об- служивания и др. В настоящее время под исследованием операций понимают применение математических методов количественного обоснования решений в конкретной области целенаправленной чело- веческой деятельности (Е.С. Вентцель).

Исследование операций как научное направление характерно для завершающих этапов жизненного цикла системы (эксплуатация, применение по назначению) и предполагает формализованное описа- ние операции и количественный анализ факторов, определяющих

достижение поставленных в операции задач. Основной задачей ис- следования операций является применение научных принципов и ма- тематических методов к исследованию функционирования систем с целью оценки характеристик и формирования рекомендаций по вы- бору оптимальных решений, обеспечивающих наиболее эффективное применение системы в конкретных условиях.

Выделим методические особенности исследования операций:

1. Построение формализованной модели операции, предназна- ченной для получения количественных оценок альтернативных реше- ний.
2. Необходимость охвата различных сторон деятельности.
3. Учёт прошлого опыта при исследовании аналогичных опе- раций.
4. Использование результатов экспериментов, поставленных в различной форме (игры, испытания, учения и т. д.).
5. Направленность результата на количественное обоснование альтернатив и упрощение процесса принятия решения, а не на выдачу самого решения.

Объектом исследования в ИО является конкретная реально су- ществующая (например, экономическая) система.

Предметом исследования в ИО являются характеристики или показатели, отражающие эффективность применения системы по це- левому предназначению в конкретных условиях.

Исследование операций позволяет количественно оценить эф- фективность работы системы в конкретных условиях и выработать рекомендации по улучшению её характеристик. Содержательно вся- кая задача исследования операций является оптимизационной, т.е. со- стоит в выборе среди некоторого множества допустимых решений, которые можно в том или ином смысле квалифицировать как опти- мальные. При этом допустимость каждого решения принимается в смысле его фактического осуществления, а оптимальность – в смысле его целесообразности.

Содержанием теоретического аспекта ИО является математиче- ский анализ оптимизационных задач и нахождение их оптимальных решений.

Прикладной аспект ИО заключается в составлении (постановке) оптимизационных задач и в определении их оптимальных решений.

Постановка задачи ИО охватывает, прежде всего, формальное описание множества допустимых решений и критериев оптимального выбора. Оно должно соответствовать содержательным представлени- ям о возможном и целесообразном выборе в данных условиях. Про- верка адекватности самих содержательных представлений объектив- ной реальности и реализация решения уже выходят за пределы облас- ти интересов ИО. Все решения (в том числе и оптимальные) прини- маются всегда на основе информации, которой располагает прини- мающий решения субъект. Поэтому каждая задача ИО в своей поста- новке должна отражать структуру и динамику знаний линейного про- граммирования (ЛПР) о множестве допустимых решений и о крите- рии оптимальности. Например, если принятие решения происходит в уже известном и не изменяющемся информационном состоянии, то задача называется статической. В таких условиях весь процесс приня- тия решения может быть сведён к единому мгновенному акту.

Выделим основные этапы операционного исследования:

1. наблюдение явления, сбор и систематизация исходных данных;
2. постановка задачи исследования;
3. разработка концептуальной (операционной) модели;
4. построение и преобразование математической модели к кано- ническому виду;
5. расчет характеристик или оптимизация параметров модели;
6. анализ выходных данных; если полученные результаты не удовлетворяют исследователя, то следует либо вернуться на этап 3 или 4, т.е. предложить для решения задачи другую математическую модель, либо вернуться на этап 2, т.е. собрать дополнительную ин- формацию и корректно сформулировать задачу;
7. разработка рекомендаций по выбору рациональной структуры (алгоритма, параметров) системы или её компонентов.

Таким образом, операционное исследование в общем случае представляет собой итерационный процесс исследования, каждый следующий шаг которого приближает нас к решению конкретной проблемы.

В центре операционного исследования находятся построение и расчет параметров математической модели (ММ) операции.

Математическая модель – это система математических соотно- шений, приближенно, в абстрактной форме описывающих изучаемый процесс или систему.

Экономико-математическая модель – это математическая мо- дель, предназначенная для исследования экономической проблемы.

# Виды задач исследования операций

Параметры операционной модели, совокупность которых обра- зует решение, называются элементами решения.

В качестве элементов решения могут фигурировать различные числа, векторы, функции, физические признаки. Например, если со- ставляется план перевозок однородных грузов из пунктов отправле- ния в пункты назначения, то элементами решения будут числа, пока- зывающие, какое количество груза будет отправлено из *i-*го пункта отправления *Ai* в *j-*й пункт назначения *Bj*.

Совокупность чисел образует решение. В простейших задачах исследования операций количество элементов решения может быть сравнительно невелико. Но в большинстве задач, имеющих практиче- ское значение, число элементов решения достаточно велико. Кроме элементов решения, которые в заданных пределах можно изменять, в задаче исследования операций имеются априорно заданные «дисцип- линирующие» условия, которые фиксированы с самого начала и на- рушены быть не могут (например, грузоподъемность машины; размер планового задания; весовые характеристики оборудования и т. п.). В частности, к таким условиям относятся располагаемые ресурсы (материальные, технические, людские, информационные) и иные ог- раничения, налагаемые на решение. В своей совокупности они фор- мируют так называемое множество возможных решений. Обозначим

это множество буквой X, а тот факт, что решение х принадлежит это- му множеству, будем записывать в виде формулы: *x* ϵ *X*. Речь идет о том, чтобы в множестве возможных решений X выделить те решения x, которые с той или иной точки зрения эффективнее (удачнее, пред- почтительнее) других. Чтобы сравнивать между собой по эффектив- ности разные решения, нужно иметь какой-то количественный крите- рий, так называемый показатель эффективности, его часто называют целевой функцией. Этот показатель выбирается так, чтобы он отра- жал целевую направленность операции. «Лучшим» будет считаться то решение, которое в максимальной степени способствует достижению поставленной цели. Чтобы выбрать показатель эффективности W, нужно, прежде всего, ответить на вопрос: чего мы хотим, к чему стремимся, предпринимая операцию?

Выбирая решение, естественно, предпочитают такое, которое обращает показатель эффективности *W* в максимум (или же в мини- мум). Например, доход от операции хотелось бы обратить в макси- мум; если же показателем эффективности являются затраты, их жела- тельно обратить в минимум. Если показатель эффективности жела- тельно максимизировать, цель задачи укажут в виде *W → max* , а если минимизировать, то в виде *W → min* .

Очень часто выполнение операции сопровождается действием случайных факторов (изменение курса валют, колебания спроса и предложения, действия конкурентов и т.д.). В таких случаях обычно в качестве показателя эффективности берется не сама переменная вели- чина, которую хотелось бы максимизировать (минимизировать), а ее среднее значение (математическое ожидание). В некоторых случаях операция, сопровождаемая случайными факторами, преследует ка- кую-то вполне определенную цель A, которая может быть только полностью достигнута или совсем не достигнута (схема «да – нет»). Тогда в качестве показателя эффективности выбирается вероятность достижения этой цели. Неправильный выбор показателя эффективно- сти может привести к ошибочным решениям и к неоправданным за- тратам и потерям. Для иллюстрации принципов выбора показателя эффективности рассмотрим примеры.

**Пример 1.1.** План снабжения предприятий.

Имеется ряд предприятий, потребляющих известные виды сы- рья, и есть ряд сырьевых баз, которые могут поставлять это сырье предприятиям. Базы связаны с предприятиями какими-то путями со- общения (железнодорожными, водными, автомобильными, воздуш- ными) со своими тарифами. Требуется разработать такой план снаб- жения предприятий сырьем (с какой базы, в каком количестве и какое сырье доставляется), чтобы потребности в сырье были обеспечены при минимальных расходах на перевозки.

Задача операции – обеспечить снабжение сырьем при мини- мальных расходах на перевозки. Показатель эффективности *R* – сум- марные расходы на перевозки сырья за единицу времени, например месяц. Цель операции – обеспечить *R→ min*.

**Пример 1.2.** Постройка участка магистрали.

Сооружается участок железнодорожной магистрали. В распоря- жении ЛПР определенное количество ресурсов: людей, техники, стройматериалов и т.д. Требуется спланировать строительство (т.е. назначить очередность работ, распределить машины и людей по уча- сткам пути, обеспечить ремонтные работы) так, чтобы оно было за- вершено в минимально возможный срок. Естественным показателем эффективности является время завершения стройки, однако оно свя- зано со случайными факторами (отказы техники, задержки в выпол- нении отдельных работ). Поэтому в качестве показателя эффективно- сти целесообразно выбрать среднее ожидаемое время T окончания стройки. Цель операции – обеспечить *T→ min*.

**Пример 1.3.** Продажа сезонных товаров.

Для реализации определенной массы сезонных товаров создает- ся сеть временных торговых точек. Требуется выбрать: число точек, их размещение, товарные запасы и количество персонала на каждой из них так, чтобы обеспечить максимальную экономическую эффек- тивность распродажи. В качестве показателя эффективности можно взять среднюю ожидаемую прибыль П от реализации товаров за сезон (*П → max*).

**Пример 1.4.** Снегозащита дорог.

В условиях Восточной Сибири метели, заносящие снегом доро- ги, представляют серьезную помеху движению. Любой перерыв дви- жения приводит к экономическим потерям. Существует ряд возмож- ных способов снегозащиты (профиль дороги, защитные щиты и т. д.), каждый из которых требует известных затрат на сооружение и экс- плуатацию. Известны господствующие направления ветров, есть дан- ные о частоте и интенсивности снегопадов. Требуется разработать наиболее экономически эффективные средства снегозащиты с учетом потерь, связанных с заносами. Речь идет о наиболее выгодном эконо- мически плане снегозащиты, поэтому в качестве показателя эффек- тивности можно выбрать средние за единицу времени (например, за год) расходы *R* на содержание и эксплуатацию дорог, включая расхо- ды, связанные как с сооружением защитных устройств, так и с расчи- сткой дорог и задержками транспорта. Цель операции – обеспечить *R → min.*

**Пример 1.5.** Выборочный контроль продукции.

Завод выпускает определенного вида изделия. Для обеспечения их высокого качества организуется система выборочного контроля. Требуется разумно организовать контроль (т. е. выбрать размер кон- трольной партии, набор тестов, правила браковки и т. д.) так, чтобы обеспечить заданный уровень качества при минимальных расходах на контроль. Естественный показатель эффективности, подсказанный формулировкой задачи, это средние ожидаемые расходы R на кон- троль за единицу времени, при условии, что система контроля обес- печивает заданный уровень качества, например средний процент бра- ка не выше заданного (*R → min*).

# Прямые и обратные задачи исследования операций

Задачи исследования операций, встречающиеся в экономиче- ской практике, делятся на две категории: а) прямые; б) обратные.

Прямые задачи отвечают на вопрос: что будет, если в заданных условиях будет принято конкретное решение. В частности, чему бу-

дет равен, при данном решении x, выбранный показатель эффектив- ности *W* (или же ряд таких показателей)? Для решения такой задачи строится математическая модель, позволяющая выразить один или несколько показателей эффективности через заданные условия и эле- менты решения.

Обратные задачи отвечают на вопрос: как выбрать решение x для того, чтобы показатель эффективности *W* обратился в максимум? Естественно, что модель прямой задачи исследования операций про- ще модели обратной задачи.

Очевидно также, что для решения обратной задачи исследова- ния операций, прежде всего, надо уметь решать прямую задачу. Для некоторых типов операций прямая задача решается настолько просто, что ею специально не занимаются. Для других типов операций построение математической модели и вычисление показателя (пока- зателей) эффективности само по себе далеко не тривиально (так, на- пример, обстоит дело с прямыми задачами теории массового обслу- живания).

Остановимся подробнее на обратных задачах. Если число воз- можных вариантов решения, образующих множество *X* , невелико, то можно просто вычислить величину *W* для каждого из них, сравнить между собой полученные значения и непосредственно указать один или несколько оптимальных вариантов, для которых *W* достигает максимума. Такой способ нахождения оптимального решения назы- вается «простым перебором».

Однако когда число возможных вариантов решения, образую- щих множество *X* , велико, поиск среди них оптимального «вслепую», простым перебором затруднителен, а зачастую практически невозмо- жен. В этих случаях применяются методы «направленного перебо- ра», обладающие той общей особенностью, что оптимальное решение находится рядом последовательных «попыток» или «приближений», из которых каждое последующее приближает нас к искомому опти- мальному.

# ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

1. Обоснуйте актуальность и практическую ценность выделения и изучения проблем принятия решений в процессе управления.
2. Перечислите условия возникновения задачи принятия решений.
3. Укажите особенности экономической системы как объекта системного исследования. Укажите факторы, которые затрудняют строгое математическое описание экономических процессов.
4. На примере конкретной экономической системы укажите план содержательного описания – обобщённой модели объекта иссле- дования.
5. Дайте характеристику объекта и предмета исследования опе- раций.
6. Приведите примеры прикладных задач исследования операций.
7. Какие математические методы используются в задачах иссле- дования операций?
8. Каковы функции операциониста в задачах исследования опе- раций?
9. Сформулируйте и приведите пример прямой задачи исследо- вания операций.
10. Сформулируйте и приведите пример обратной задачи иссле- дования операций.

# Глава 2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

*Линейное программирование* – это частный раздел оптимально- го программирования. Суть принципа оптимальности состоит в стремлении выбрать такое планово-управленческое решение

*f* *x*  *x ,x ,....,x* , где *x ,* *j*  1*,n* – его компоненты, которое наилуч-

1 2 *n*

*j*

шим образом учитывали бы внутренние возможности и внешние ус- ловия производственной деятельности хозяйствующего субъекта. Выражение «наилучшим образом» подразумевает некоторый крите- рий оптимальности, позволяющий сравнивать эффективность тех или иных решений. Традиционные критерии оптимальности: «максимум прибыли», «минимум затрат», «максимум рентабельности» и др.

Слова «учитывало бы внутренние возможности и внешние усло- вия производственной деятельности» означают, что на выбор реше- ния накладывается ряд условий. Таким образом, реализовать на прак- тике принцип оптимальности в планировании и управлении – значит решить экстремальную задачу, т.е. найти максимум или минимум

функции

при ограничениях

1

2

*f* *x*  *x ,x*

*,* *,xn* 

(2.1)

  *x ,x*

1

1

2

*, ... x*

*,**b ,*

 *x ,x*



1

 2

2

*n*

*, ... xn*

1

*,**b ,*

2

 *..........*

(2.2)

 *x ,x , ... x* *,**b ,*

 *m* 1 2

*j*

*n*  *m*



Или более компактная запись:

*x*  0*, j*  1*,n*

*max**min* *f* *x*  *x ,x*

1

2

*,* *,xn* *,*

(2.3)

 *x ,x , ... x* *,**,**b ,i* 1*,m,*

(2.4)

*i* 1 2 *n* *i*

*x j*  0*, j*  1*,n* . (2.5)

В задаче линейного программирования (ЗЛП) требуется найти экстремум (максимум или минимум) линейной целевой функции 𝑓(X):

*j*

*x*  0*, j*  1*,n* (2.6)

при ограничениях (условиях):

 *a*11 *x*1



 *a*12 *x*2

* *...*  *a*1*n xn*

*,**,**b ,*

 21 *x*1

1

*a*

* *a*22 *x*2
* *...*  *a*2*n xn*

*,**,**b ,*

(2.7)

 *..........*

2



*am*1 *x*1  *am* 2 *x*2  *...*  *amn xn* *,**,**bm ,*

*x*  0*;*

*j*

*j*  1*,n,*

(2.8)

где *a*

*b , c*

*i*  1*,m;*

*j*  1*,n* – заданные постоянные величины.

*ij , i j*

Так записывается общая ЗЛП в развернутой форме; знак *,**,* означает, что в конкретной ЗЛП возможно ограничение типа равенст- ва или неравенства (в ту или иную сторону).

Систему ограничений (2.7) называют функциональными огра- ничениями ЗЛП, а ограничения – прямыми.

Вектор *,**,*, удовлетворяющий системе ограничений (2.7),

(2.8), называется допустимым решением или планом ЗЛП. План (до- пустимое решение), который доставляет максимум или минимум це- левой функции (2.6), называется оптимальным планом (оптимальным решением) ЗЛП.

Термины «решение» и «план» – синонимы, однако первый ис- пользуется чаще, когда речь идет о формальной стороне задачи (ее математическом решении), а второй – о содержательной стороне (экономической интерпретации).

Наиболее часто встречаются две разновидности задач линейного программирования:

1. Каноническая (основная). Система ограничений, помимо тривиальных ограничений, включает в себя только уравнения.

Канонической формой записи ЗЛП (КЗЛП) называют задачу вида: найти

при ограничениях

*max*

*n*

*f* *X*  *n c x*

*j* 1

*j*

*j*

(2.9)

 *aij x j j* 1

*j* *i*

 *bi , i*  1*,m,*

(2.10)

*x*  0*, b*  0*, i*  1*,m; j*  1*,n.* (2.11)

Векторная форма записи КЗЛП имеет вид: найти

при ограничениях

*max*

*f* *X*  *CX*

*A*1 *x*1  *A*2 *x*2  *... An xn*  *B, x*  0*,*

*,*

*,*

1 2 *n*

где

*С*  *с*1 *,c*2 *, ... cn*  и

*X*  *x ,x , ... x*  – вектор строки; *CX* – их скаляр-

ное произведение;

*Aj u B*

– вектор-столбцы:

 *a*11 

 *a*12 

 *a*1*n* 

 *b*1 

       

 *a*21 

 *a*22 

 *a*2 *n* 

 *b*2 

 *.* 

*A*   ,

1  *.* 

 *.* 



*A*  

2 



*.* 

 , ...

*.* 

*.* 



*A*  

*n* 



*.*   *.* 

 , *B*    .

*.*   *.* 

*.*   *.* 

   

*a a*

   

*a b*

 *m*1 

 *m* 2 

 *mn* 

 *m* 

Матричная форма записи КЗЛП:

*max f* *X*  *CX*

при условиях

*AX*  *B, X*  0 ,

*.*

*ij*

где *С*  *с ,c , ... c* 

1

2

*n*

* вектор-строка; *А*  *a* 
* матрица размерности

*m*  *n* , столбцами которой являются вектор-

 *х*1 

столбцы

*Aj* ;

 *b*1 

   

 *х*2   *b*2 



*Х*  





*.* 

 – вектор-столбец,

*.* 

*.* 



*B*  





*.* 

 – вектор-столбец.

*.* 

*.* 

   

*х b*

 *m*   *m* 

1. Стандартная (симметричная). Система ограничений состоит только из неравенств:

*max**min* *f* *X*  *CX* ,

*AX*  *B, X*  0*.*

При этом запись

*Х*  0

понимают как вектор (или вектор-

столбец, в зависимости от контекста), у которого все компоненты не- отрицательны.

Приведение ЗЛП к каноническому виду осуществляется введе-

нием в левую часть соответствующего ограничения вида (2.7) *k*  *й*

дополнительной переменной

*xn**k*  0

со знаком «–» в случае ограни-

чения типа « » и со знаком «+» в случае ограничения типа « ».

Например, стандартный вид ЗЛП:

*f* *x*  2*x*  *x*  1  *min*,

1

2

*x*1  2*x*2  1  0,



 *x*1

 *x*2

 0 ,

 *x*1



 0 *, x*2

 0.

Ее канонический вид:

*x*1  2*x*2  *х*3  1  0 ,



 *x*1

* *x*2
* *х*4

 0,

 *x*1 *,x*2



*,х*3

*,х*4

 0 .

# Графический метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим ЗЛП в стандартной форме записи:

*max**min* *f* *X*   *c x*  *c x*  *...*  *c x* ,

(2.12)

1 1 2 2 *n n*

 *a*11 *x*1  *a*12 *x*2  *...*  *a*1*n xn*  *b*1 *,*



 21 *x*1

*a*

 *a*22 *x*2

 *...*  *a*2*n xn*

 *b*2 *,*

(2.13)

 *..........*



*am*1 *x*1  *am* 2 *x*2  *...*  *amn xn*  *bm ,*

*x j*  0*; j* 1*,*2*,..., n* . (2.14)

Рассмотрим эту задачу на плоскости, т. е. в случае, когда число

переменных равно двум: *n*  2 . Пусть система (2.13), (2.14) совместна

(имеет хотя бы одно решение):

 *a*11 *x*1  *a*12 *x*2  *b*1 *,*



 21 *x*1

*a*

 *a*22 *x*2

 *b*2 *,*

 *..........*



*am*1 *x*1  *am* 2 *x*2  *bm ,*

*x*1  0*; х*2  0 .

Каждое неравенство этой системы геометрически определяет

полуплоскость с граничной прямой

*ai*1 *x*1  *ai* 2 *x*2  *bi* ,

*i*  1*,m*

. Условия

неотрицательности определяют полуплоскости соответственно с гра-

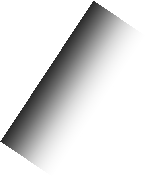
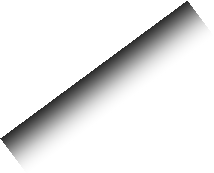
ничными прямыми

*х*1  0,

*х*2  0 . Система совместна, поэтому полу-

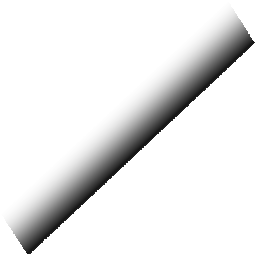
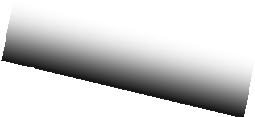
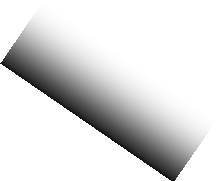
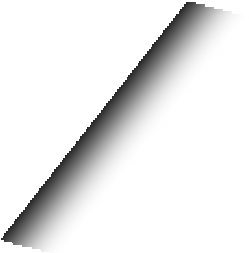
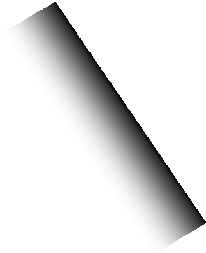
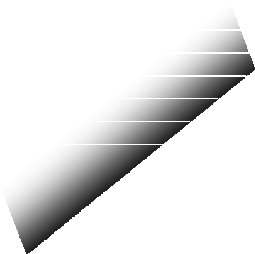
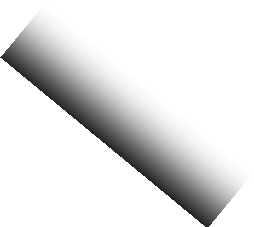
плоскости, пересекаясь, образуют общую часть, которая является вы- пуклым множеством и представляет собой совокупность точек, коор- динаты каждой из которых составляют решение данной системы. Со- вокупность этих точек называют многоугольником решений. Это мо- жет быть точка, отрезок, луч, замкнутый многоугольник, неограни- ченная многоугольная область (рис. 2.1).

х2 х2



х1

неограниченный многоугольник



многоугольник решений

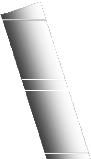
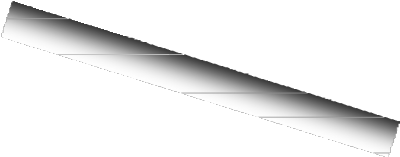
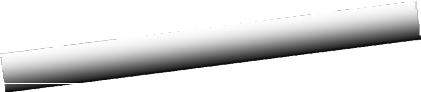
Задача имеет единственное

х2 решение х2

А

В

х1



Целевая функция не- х1

ограниченна

Система ограничений х1

несовместна

Рис. 2.1. Различные варианты многоугольников решений

Таким образом, геометрически ЗЛП (2.12)–(2.14) представляет собой поиск такой точки многогранника решений, координаты кото- рой доставляют линейной (целевой) функции наибольшее (наимень-

шее) значение, причем допустимыми решениями являются все точки многогранника решений.

Приведем пример решения конкретной задачи.

Найти *max* и *min* функции *f* *x*  *x*  *x* при заданной системе

1

2

ограничений:

 2*x*1  4*x*2  16 ,

 4*x*  2*x*  8 *u*

*x ,x*  0



 *x*1



1 2

 3*x*2  9 .

1 2 ,

По заданным ограничениям построим многоугольник допусти- мых решений. Для этого:

1. Во всех неравенствах выразим *x*2

через

*x*1 :

  4  *x*1

*x*

 2

2



*x*  4  2*x*

, 1

, 2

 2 1

  3  *x*1 .



*x*

 2 3

3

1. Вместо неравенств запишем равенства:

  4  *x*1

*x*

 2

2



*x*  4  2*x*

, 1

, 2

 2 1

  3  *x*1



*x*

 2 3

. 3

Построим графики функций ограничения (рис. 2.2).

На графике все эти подробности пропущены и вверху в таблич- ках сразу записаны результаты для трех прямых.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x1 | 0 | 9 |
| x2 | 3 | 9 |

- пара точек уравнения (1)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x1 | 0 | 8 |
| x2 | 4 | 0 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x1 | -2 | 0 |
| x2 | 0 | 4 |

x2



(2)

4

A

(1)

(3)

C

B

х1

2

0

4

8 9

- пара точек уравнения (2)

- пара точек уравнения (3)

Рис. 2.2. Графическое решение задачи

Поскольку все уравнения – уравнения первой степени, то им со- ответствуют прямые линии. Известно, что через две точки можно провести только одну линию. Поэтому для построения графика пря- мой линии обычно находят любые две (неважно какие) точки и через них по линейке проводят искомую линию. Для простоты обычно де- лают так. Полагают одну переменную, равной нулю, и из уравнения находят вторую переменную. Таким образом, получают одну точку. Потом наоборот. Получают две необходимые точки, наносят их на график и через них проводят прямую линию. Так, из уравнения

*x*  4  *x*1

2 2

получим следующее. Положим

*х*1  0, тогда

*х*2  4 . То есть

получили одну точку

*М* 0*,*4. Теперь, наоборот: если *х*  0, то из

2

1

2

уравнения следует, что

*х*1  8 . Получили вторую точку *М* 8*,*0. Нано-

сим их на график и получаем прямую 1.

Далее найдем координаты точек пересечения прямых (1), (2) и (3):

1. Пересечением прямых (1) и (2) является точка А. Для нахож- дения ее координат нужно решить систему уравнений, составленных, соответственно, из 1-го и 2-го уравнений:

 *x*

 2

 4  *x*1

 4  *x*1

 4  2*x*

 *x*  0 .

*x*2

 4 

2

2*x*1

2 1 1

Нашли первую координату. Подставив значение *х*1 в любое

уравнение системы, найдем значение второй координаты точки А, оп-

ределяющей пересечение прямых 1 и 2 –

*х*2  4 . Таким образом, коор-

динатами точки А будут *A*0*,*4.

Так как

*f* *x*  *x*  *x*

2

1

, то значение целевой функции в точке А

будет равно –

*f* 0*,*4  4.

1. Пересечением прямых линий 1 и 3 является точка В . Её ко- ординаты находим аналогичным образом:

  4  *x*1

*x*

 2

 2

 *x*  3  1

2

 3

 4  1

2

 3  1

3

 *x*1  6 

*x*2  1.

Таким образом, координаты точки В –

*B*6*,*1.

Так как

*f* 6*,*1  7 .

*f* *x*  *x*

 *x*2

, то значение целевой функции в точке В –

1. Пересечением прямых линий 2 и 3 является точка С . Ее ко- ординаты находим таким же образом:

1

*x*2  4  2*x*1  

  *x* 

  3 

 22

 *x* 4 2*x* 3 1 *x x* .

 *x*2  3  1

1 3 1 7 2 7

 3

Но по условию необходимо, чтобы

*x*1  0 . Следовательно, исхо-

дя из графика, точка С' имеет координаты

*C'* 0*,*3. И поскольку

*f* *x*  *x*

1

 *x*2

, то значение функции в точке С' –

*f* 0*,*3  3 .

1. Отсюда вытекает, что

*max f* *x*

находится в точке В c коорди-

натами

*B*6,1, как показано на рис. 2.3.

X2



**(2)**

4

***A***

**(1)**

**(3)**

***C'***

***B*** *max (6,1), f=7*

X1

**2**

0

4

8 9

Рис. 2.3. Нахождение максимума

Рассмотрим теперь некоторые модели экономических задач.

1. *Задача об использовании ресурсов (планировании производства)*

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Введем следующие обозначения:

*x j* – число единиц некоторой продукции вана к производству;

*Pj* , которая запланиро-

*bi* – запас некоторого ресурса *Si* ;

*ai , j*

– некоторое число единиц ресурса

*Si* , затрачиваемое на еди-

ницу продукции *Pj* ;

*ci* – прибыль от реализации продукции *Pj* .

С этими обозначениями математическая модель задачи будет иметь вид:

*f* *x*  *c x*  *c x*  *.... c x*  *max* ,

.

1 1 2 2 *n n*

где

*f* *x*

целевая функция – общая прибыль предприятия. Естествен- но, она должна быть максимальна. На это накладываются ограничения:

 *a*11 *x*1  *a*12 *x*2  *...*  *a*1*n xn*  *b*1 ,



 21 *x*1

*a*

 *a*22 *x*2

 *...*  *a*2*n xn*

 *b*2 ,

 *.................... ......................*



*am*1 *x*1  *am* 2 *x*2  *...*  *am* 2 *xn*  *bm* .

И условие неотрицательности:

*x*1  0 *,*

*x*2  0 *,*

*....*

*xn*  0 .

Содержательная интерпретация задачи:

*Составить такой план выпуска продукции*

*X*  *x , x*

*, ... xn*

*, при*

*котором прибыль от реализации продукции будет максимальной при условии, что потребление ресурсов по каждому виду продукции не превзойдет имеющихся запасов.*

1

2

Рассмотрим теперь частные случаи.

Пусть для некоторого предприятия прибыль от единицы про-

дукции

*P*1 составляет 2 руб., т. е.

*c*1  2 , а от единицы продукции *P*2 –

3 руб., т. е.

табл. 2.1.

*c*2  3. Запасы ресурсов и их затратность представлены в

Таблица 2.1

Запасы и затратность ресурсов

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вид ресурса | Запас ресурса | Число единиц ресурса, затрачиваемых  на изготовление единицы продукции | |
| P1 | P2 |
| S1 | 18 | 1 | 3 |
| S2 | 16 | 2 | 1 |
| S3 | 5 | - | 1 |
| S4 | 21 | 3 | - |

Составим экономико-математическую модель.

Целевая функция *f* *x*  2*x*  3*x*  *max* ,

1

2

ограничения

1*x*1  3*x*2  18 ,

2*x*  1*x*  16 ,

 1

 1*x*



2

2

 5,

 3*x*1  21.

условие неотрицательности:

*x*1 *; x*2  0 .

1. *Задача о составлении рациона (технологическая задача)*

Необходимо составить такой дневной рацион, имеющий мини- мальную стоимость, в котором содержание каждого вида питатель- ных веществ было бы не менее установленного предела.

Введем обозначения:

*x j* – число единиц корма *j-*го вида;

*bi* – необходимый минимум содержания в рационе питательного

вещества *bi* ;

*aij*

– число единиц питательного вещества *Si*

в единице корма

*j-*го вида;

*ci* – стоимость единицы корма *j-*го вида.

Тогда математическая модель задачи будет иметь вид: целевая функция

*f* *x*  *c x*  *c x*  *.... c x*  *min* ,

1 1 2 2 *n n*

система ограничений

 *a*11 *x*1  *a*12 *x*2  *...*  *a*1*n xn*  *b*1 ,



 21 *x*1

*a*

 *a*22 *x*2

 *...*  *a*2*n xn*

 *b*2 ,

 *.......... ................... ............*



*am*1 *x*1  *am* 2 *x*2  *...*  *am* 2 *xn*  *bm* .

условие неотрицательности

*x*1  0 *,*

*x*2  0 *,*

*....*

*xn*  0 .

*Частный случай.*

Стоимость 1кг корма вида I – 4 руб., а вида II – 6 руб. Используя данные табл. 2.2, составить такой рацион питания, чтобы стоимость была минимальной, а содержание каждого вида питательных веществ было не менее установленного предела.

Составим таблицу (см. табл. 2.2).

Таблица 2.2

Составление рациона питания

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Питательное вещество | Необходимый минимум питательных веществ | Число единиц питательного  вещества в 1 кг корма | |
| I | II |
| S1 | 9 | 3 | 1 |
| S2 | 8 | 1 | 2 |
| S3 | 12 | 1 | 3 |

Ей соответствует экономико-математическая модель:

целевая функция *f* *x*  4*x*  6*x*  *min* ,

1

2

ограничения

 3*x*1 1*x*2  9 ,

 1*x*  2*x*  8 ,



1*x*

1

 3*x*

2

 12 .

 1 2

Условие неотрицательности

*x*1  0*,*

*x*2  0 .

1. *Задача об использовании мощностей (задача о загрузке обо- рудования)*

Предприятию задан план производства продукции по времени и

номенклатуре: требуется за время *T* выпустить

*n*1 *, n*2 *, ... nk*

единиц

продукции

*P*1 *, P*2 *, ... Pk* . Продукция производится на станках

*S*1 *, S*2 *, ... Sm* .

Для каждого станка известны производительность

*aij*

и затраты

*bij* на

изготовление продукции *Pj*

на станке *Si*

в единицу времени.

Необходимо составить такой план работы станков, чтобы затра- ты на производство всей продукции были минимальными.

Экономико-математическая модель задачи.

Обозначим через

*xij*

– время, в течение которого станок *Si*

будет

занят изготовлением продукции *Pj* .

Целевая функция

*f* *x* имеет вид:

*f* *x*  *b*

11

*x*11

 *b*12

*x*12

 *...bmk*

*xmk*

 *min* .

Так как время каждого станка ограничено и не превышает *T* , то справедливы следующие неравенства.

Ограничения по времени:

 *x*11  *x*12  *... x*1*k*

 *T* ,



*x*

 21

 *x*22

 *... x*2*k*

 *T* ,

 *...........................*



*xm*1  *xm* 2  *... xmk*  *T* .

Удовлетворение номенклатуре выпуска:

 *a*11 *x*11  *a*21 *x*21  *...*  *am*1 *xm*1  *n*1 ,

*a x*  *a x*  *...*  *a x*  *n* ,

 12 12

22 22

*m* 2 *m* 2 2

 *..................................*



*a*1*k x*1*k*

* *a*2*k x*2*k*
* *...*  *amk xmk*

 *nk* .

После решения поставленной задачи возникают вопросы: что можно сделать, чтобы улучшить полученное решение, насколько ус- тойчиво полученное решение и т. д. На эти вопросы отвечает сле- дующий этап задач линейного программирования.

### Анализ чувствительности задачи линейного программирования

*Первая задача на чувствительность*

Первая задача на чувствительность отвечает на вопрос: на сколько (можно/нужно) сократить или увеличить запасы ресурсов?

1. На сколько можно увеличить запас некоторого ресурса для улучшения полученного оптимального значения целевой функции *f* ?
2. На сколько можно снизить запас некоторого ресурса при со- хранении полученного оптимального значения целевой функции *f* ?

Рассмотрим вопрос на конкретном примере.

*Необходимо определить суточную производственную программу небольшого цеха по пошиву женской одежды. Требуется установить*

*количество брюк и юбок, которые нужно сшить за сутки, если из- вестны затраты на пошив этих изделий и их цена реализации на рынке. Суточный спрос на брюки не превышает 18 шт. Доход дол- жен быть максимальным* (табл. 2.3).

Таблица 2.3

Производственная программа цеха

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Производственные  факторы | Расходы на одно готовое изделие | | Максимально возможный  суточный запас |
| брюки | юбки |
| Ткань, м | 1,5 | 2 | 42 |
| Трудоемкость, чел./ч | 3 | 2 | 60 |
| Накладные расходы, руб. | 5 | 5 | 200 |
| Цена одного изделия, руб. | 60 | 50 | – |

Имеем задачу линейного программирования: целевая функция

1

ограничения

*f* *x*  60*x*

* 50*x*2

 *max* ,

 1*,*5*x*1  2*x*2  42



1. *по*

*ткани* ,

 3*x*1



* 2*x*2

 60

*(* 2 *) по*

*трудоемкости* ,

5*x*1  5*x*2  200

*(* 3 *) по накладным*

*расходам* ,

 *x*1  18

*(* 4 *) по*

*спросу* .

условие неотрицательности

*x*1  0*,*

*x*2  0 .

где

*x*1 – число брюк, *x*2

– число юбок, пошитых за день.

Решим задачу графическим способом (рис. 2.4).

x2



40

(2)

В 21

(4)

Max f(12,12) = 12\*60 + 12\*50 = 1320р

С(12,12)

А

0

D

Е 20

(1)

28

(3)

х1

40

Рис. 2.4. Графическое изображение пространства решений задачи

Таким образом, число брюк, которое необходимо пошить –

*х*1  60, число юбок – *х*2  50, при этом целевая функция достигает

максимума, равного

*fmax* 12  60  12  50 1320.

Ограничения линейной модели классифицируют:

* *на связывающие (активные) – в нашем случае прямые 1 и 2;*
* *и несвязывающие (неактивные) – в нашем случае прямые 3, 4.*

Прямая, представляющая связывающее ограничение, должна проходить через оптимальную точку.

Если ограничение связывающее, то соответствующий ему ре- сурс называется дефицитным.

Ресурс, с которым ассоциировано несвязывающее ограничение, – недефицитный (прямая 3) .

Ограничения, которые не участвуют в формировании простран- ства допустимых значений, – *избыточные* (прямая линия 3).

Анализ модели на чувствительность включает:

* 1. нахождение предельно допустимого увеличения запаса дефи- цитного ресурса, позволяющего улучшить найденное оптимальное решение (неравенства (1) и (2));
  2. нахождение предельно допустимого снижения запаса неде- фицитного ресурса, не изменяющего найденное ранее оптимальное значение целевой функции (неравенство (3).

Рассмотрим первый пункт. Найдем предельно допустимое уве- личение запаса дефицитных ресурсов: ткани и трудоемкости, графики которых выражены прямыми 1 и 2 соответственно. Можно изменить неравенство (1) – запас ткани, выражающее область допустимых зна- чений прямой 1. Например, увеличим запас ткани, но так, чтобы точ- ка пересечения С прямых 1 и 2 сдвинулась влево и вверх (при этом возрастет целевая функция *f* ), но не перешла бы точку пересечения

прямой 2 с осью х2. Точка пересечения прямой 2 с осью х2 имеет ко-

ординаты *x*1  0, *x*2  30 – *M* 0*,*30. И это будет новая опорная точка

прямой 1. Но чтобы прямая 1 прошла через новую опорную точку

*М* 0*,*30, должен измениться запас ткани. Обозначим новый запас

1

ткани как *Z* . Таким образом, прямая 1 будет описываться уравнением

1*,*5*x*1  2*x*2  *Z* .

Подставив координаты новой опорной точки лучим:

*x*1  0 и

*x*2  30 , по-

1*,*5  0  2  30  *Z*  *Z*  60.

При этом координаты второй опорной точки прямой 1 будут оп- ределяться из нового уравнения прямой 1' (рис. 2.4):

1*,*5*х*1  2*х*2  60 ,

*х*1  0*, х*2  30  *М* 0*,*30;

1

*х*  0*, x*  40  *М* 40*,*0.

2 1 2

Следовательно, прямая *1'* будет иметь другое расположение, по- казанное на рис. 2.4.

То есть если запас ткани увеличить с 42 до 60 м, то це-

левая функция увеличится с *f*  60 12  50 12 1320 до

*f*  60  0  50  30 1500, при этом точка максимума целевой функции

сместится из точки

*С*12*,*12 в точку

*М* 0*,*30.

Графически это будет выглядеть следующим образом (рис. 2.5).

1

х2



40

M1(0,30)

В

21

А

0

С(12,12)

(2)

(4)

(1')

(1)

D

Е 20

(3)

x1

28 40

Рис. 2.5. Изменение суточного запаса ткани

Таким образом, запас ткани можно увеличить на

60  42  18 м,

при этом доход возрастет на

60  42  18

руб. Рассмотрим теперь пря-

мую 2 – ограничение по трудоемкости. Ее точка пересечения с осью х2 – 0*,*30. Передвинем эту точку вверх (при этом будет возрастать

целевая функция *f* ), но так, чтобы не перейти точку пересечения пря-

мой 3 с осью х2, имеющей координаты *М* 0*,*40. При этом изменится

3

ресурс трудоемкости. Он теперь будет иметь значение не 60, а неко-

торое *Y* , т. е. уравнение прямой 2' будет иметь вид:

3*x*1  2*x*2  *Y* . Под-

ставим в него координаты 0*,*40

– точка пересечения прямой 3 с осью

х2, которая теперь будет принадлежать прямой 2'. Получим

3  0  2  40  *Y*  *Y*  80. Следовательно, уравнение прямой ограни-

чения суточного фонда рабочего времени будет иметь вид:

3*x*1  2*x*2  80 . А точка пересечения прямой (2') с осью х1 будет иметь

координаты 26*,*7*;*0

(рис. 2.6). Целевая функция в точке

*М* 0*,*40

ста-

нет *f*  60 0  50 40  2000, т.е. доход возрастет на 680 руб. при уве-

3

личении трудового ресурса на 80 – 20 = 20 чел./ч.



x2

М3(0,40)

(4)

(2)

В

21

N (1)

(3)

x1

А

0

Е

20

28

40

(2')

Рис. 2.6. Изменение суточного фонда рабочего времени

Рассмотрим второй пункт – изменение суточного запаса средств

на накладные расходы (прямая 3 –

5*x*1  5*x*2  200). Проанализируем

рис. 2.7. Увеличение накладных расходов приведет к тому, что пря- мая 3 расположится еще дальше от начала координат, что никак не повлияет на целевую функцию.

Снижение накладных расходов и перемещение прямой 3 вниз до пересечения с точкой С(12, 12) также никак не повлияет на целевую функцию. Подставим координаты точки С(12; 12) в ограниче- ние 3. Получим: 5\*12+5\*12=120. Таким образом, снижение нак- ладных расходов на 80 руб. – с 200 до 120 руб. – никак не повлияет на оптимальное решение. Снижение накладных расходов более чем на 80 руб. приведет к уменьшению значения целевой функции (см. рис. 2.7).

x2



В

21

С(12,12)

А

0

Е

40

(2)

(4)

Max f(12,12) = 12\*60 + 12\*50 = 1320р

(1)

D

20 28

(3)

х1

40

Рис. 2.7. Изменение суточного запаса средств на накладные расходы

Увеличение спроса на брюки никак не повлияет на оптималь- ную точку, так как увеличение запаса избыточного ресурса не изме- нит оптимальный производственный план. Уменьшение спроса на брюки изменит расположение оптимальной точки только тогда, когда спрос уменьшится до уровня менее 12 брюк в сутки (рис. 2.8).

40

x2

(4)

12)

(3)

D

(1)

x1

(2)

С(12,

В 21

А

0 1 18 28 4

Рис. 2.8. Изменение спроса на брюки

Результаты проведенного исследования сведем в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Результаты исследования

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Ресурсы | Тип ресурсов | Максимальное изменение запаса ресурсов | Максимальное изменение дохода от реализации, р. |
| 1 (ткань) | Дефицитный | 60 – 42 = 18 м. | 1500 – 1320 = 180 р. |
| 2 (труд) | Дефицитный | Невозможно | 1455 – 1320 = 15 р. |
| 3 (накладн.) | Избыточный | Может только уменьшить | Может только уменьшить |
| 4 | Недефицитный | Безразлично | Безразлично |

*Вторая задача на чувствительность*

Ответим теперь на следующий вопрос: увеличение объема како- го ресурса наиболее выгодно?

Пусть ценность дополнительной *i*-й единицы ресурса – *yi* . Тогда

величина *yi* определяется из соотношения:

*y*  *максимальное приращениеоптимального значения дохода F* .

*i максимально допустимый прирост ресурсаi*

Так, для предыдущей задачи при увеличении запаса ткани на

18 м прибыль увеличилась на 180 руб. Следовательно, ценность *у*1

ресурса ткани будет равна:

*y*  180 *p*

1 18*м*

 10

руб./м.

В то же время увеличение трудового ресурса на 20 чел./час при-

водит к увеличению прибыли на 680 руб. Следовательно, ценность *у*2

трудового ресурса будет равна:

*y*2 

680 *p*

20 *чел*./ *ч*

 10

руб./(чел./ч).

Следовательно, ценность трудового ресурса выше, чем ценность запаса ткани.

*Третья задача на чувствительность*

Рассмотрим теперь, в каких пределах допустимо изменение ко- эффициентов целевой функции? Или в нашем случае, в каких преде- лах допустимо изменение цены выпускаемой продукции.

1. Каков диапазон изменения того или иного коэффициента це- левой функции, при котором не происходит изменения оптимального решения?
2. Насколько следует изменить тот или иной коэффициент целе- вой функции, чтобы изменить статус (дефицитный – недефицитный) некоторого ресурса?

В качестве примера рассмотрим тот же цех по пошиву женской

одежды. Его целевая функция имеет вид:

*f* *x*  60*x*  50*x*  *max* ,

1

2

т. е.

*с*1  60,

*с*2  50. Построим график целевой функции:

*f* *x*  60*x*

1

 50*x*2 .

Из уравнения видно, что графиком целевой функции будет яв- ляться прямая линия, проходящая через оптимальную точку C(12; 12), и ее значение в этой точке – 1320, т. е. уравнение целевой функции

можно записать в виде

*f* *x*  60*x*  50*x* 1320.

1

2

Эта прямая пересекает ось х2 в точке 0*;* 26*,*4, ось х1 – в точке

0*;*22, как показано на рис. 2.9.

При изменении коэффициентов

*c*1 и *c*2

график целевой функции

вращается вокруг точки

*C*12*,*12

по часовой или против часовой

стрелки. Действительно, запишем уравнение целевой функции в виде

*y*  *kx*  *b* :

*х*   60 *х*

 1320   *с*1 *х*

 26*,*4 ,

2 50 1 50 1

*с*

2

где

*k*   *c*1

*c*2

 *tg*

– угловой коэффициент,  – угол наклона прямой к

Так как

положительному направлению оси

*k*  0 , то    .

2

*Ох*1 .

Отсюда видно, что если увеличивается

*c*1 или уменьшается

*c*2 ,

то угловой коэффициент увеличивается и угол  увеличивается, т. е. прямая вращается по часовой стрелке.

Если же

*c*1 уменьшается или *c*2

увеличивается, то угловой коэф-

фициент уменьшается и угол  уменьшается, т. е. прямая вращается против часовой стрелки (рис. 2.9).

40



x2

(4)

(2)

***f(x) = с1 x1 + с2***

***F = 60x1 + 50x2 =1320***

С(12,12)

D

(3)

(1)

х1

30

26,4

В

21

А

Е 22

0 20 28 40

Рис. 2.9. График прямой целевой функции

Вычислим границы интервалов возможных колебаний

при которых точка С останется оптимальной.

*c*1 и

*c*2 ,

Зафиксируем

*c*2  50, тогда целевая функция будет иметь вид:

*F*  *c x*  50*x*

 *x*  *F*

 *c*1 *x* .

1 1 2

2 50

50 1

Известно, что если уравнение прямой линии записано в виде

*y*  *kx*  *b* , то коэффициент перед *x* численно равен тангенсу угла  ,

углу наклона прямой к оси *OX* , т.е. *k*  *tg*. Применительно к нашему

случаю коэффициент перед

*x*1 , т. е.

* *c*1

50

, численно равен тангенсу уг-

ла  , угла наклона прямой к оси х1 , а именно,

*tg*   *c*1 .

50

Точка С будет оставаться оптимальной до тех пор, пока наклон прямой не выйдет за пределы, определяемые наклонами прямых ог- раничения 1 и ограничения 2.

Уравнение прямой 1, как мы видели, имеет вид:

1*,*5*x*1  2*x*2  42 .

Преобразовав, получим:

*x*  42  1*,*5 *x*

 *x*  21  3 *x* ,

2 2 2 1 2 4 1

т. е. тангенс угла наклона прямой 1 к оси х1 равен Уравнение прямой 2 имеет вид:

3*x*1  2*x*2  60.

*tg*1

  3 .

4

Сделав аналогичные преобразования, получим:

*x*  60  3 *x*  *x*  30  3 *x* ,

2 2 2 1 2 2 1

т.е. тангенс угла наклона прямой 2 к оси х1 равен *tg*2

  3

2

(рис. 2.10).



x2

40

***= с1 x1 + с2 x2***

х1

40

Рис. 2.10. Изменение положения прямой целевой функции при колебаниях цены с1

30

***f***

(2)

***F = 60x1 + 50x2 =1320***

21

С(12,12

(1)

А

0 Е

20

28

Определим теперь диапазон колебаний *c*1 :

*tg*  *tg*1

  *c*1

50

  3

4

 *c*1

 37*,*5 ,

*tg*  *tg*2

  *c*1

50

  3

2

 *c*1

 75 .

Таким образом, интервал изменения *c*1 , в котором точка С –

единственная оптимальная, определяется неравенством 37*,*5  *c*1  75.

Зафиксируем теперь

*c*1  60, тогда целевая функция:

*F*  60*x*1  *c*2 *x*2 .

Отсюда

*x*  *F*

* 60 *x*

 *tg*   60 .

2 1

*c*

*c*

2 2 2

Но ранее мы нашли, что тангенс угла наклона  заключен в пределах

*c*

* + 3  *tg*   3 . Следовательно, можно записать:

2 4

 3   60   3  40  *c*  80 .

2

2 *c*2 4

Таким образом, интервал изменения *c*2 , в котором точка С –

единственная оптимальная, определяется неравенством

40  *c*2  80.

При достижении коэффициентом

*c*1 значения, равного

*c*1  37*,*5 ,

ресурс 2 становится недефицитным. То есть, если доход от продажи одних брюк станет меньше 37,5 руб., надо пересматривать суточную производственную программу. Когда значение с1 превысит 75 руб., суточная производственная программа будет предусматривать пошив 18 брюк и 3 юбок (оптимальный план – точка D).

# Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Если число переменных в ЗЛП больше двух, то на плоскости их уже не отразишь и, соответственно, графический метод решения не пригоден. Для этого случая разработаны различные методы решения, среди которых наиболее распространенным является симплексный метод (или симплекс-метод), разработанный американским ученым Дж. Данцигом.

Суть этого метода заключается в том, что вначале получают до- пустимый вариант, удовлетворяющий всем ограничениям, но не обя- зательно оптимальный (так называемое начальное опорное решение). Оптимальность достигается последовательным улучшением исходно- го варианта за определенное число этапов (итераций). Нахождение начального опорного решения и переход к следующему опорному решению проводится на основе метода Жордана – Гаусса для системы линейных уравнений в канонической форме, в которой должна быть

предварительно записана исходная ЗЛП. Направление перехода от одного опорного решения к другому выбирается на основании крите- рия оптимальности (целевой функции) исходной задачи.

Рассмотрим симплекс-метод решения ЗЛП на примере. Предпо- ложим, что надо решить ЗЛП симплекс-методом:

*f*  2*x*1  *x*2  *max*

*(*1*)*

*(* 2 *)*

*(* 3 *)*

3*х*1  27

(1)

2*х*2  30

(2)

*х*1  *х*2

 20

(3)

*х*1*,*2  0

При этом необходимо найти оптимальный производственный план, максимальную прибыль и определить свободный запас каждого ре- сурса.

Вначале, для ориентира, решим эту задачу графическим спосо- бом (рис. 2.11). Найдем точку из многоугольника ОАВСД, в которой

целевая функция принимает максимальное значение:

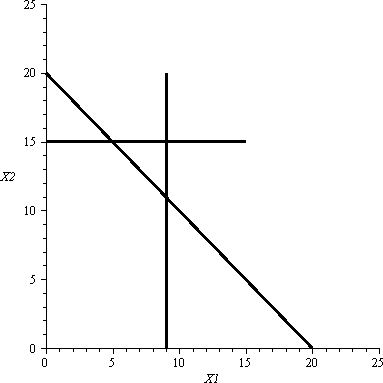
*A*0*;*15 – *f* *A*  15;

*B*5*;*15 – *f* *B*  25; *C*9*;*11 – *f* *C*   29;

*D*9*;*0 –

*f* *D*  18;

*f* *O*  0 .



(3)

***fmax=2x1+x2=2·9+11=29***

А

В

С(9;11)

(2)

(1)

D

О

Рис. 2.11. Графическое решение задачи

Целевая функция в точке С(9; 11).

*f*  2*x*1  *x*2

принимает максимальное значение

Решим теперь эту задачу симплекс-методом.

Для этого приведем систему ограничений к каноническому ви-

ду, введя дополнительные переменные *x*3 *, x*4 *, x*5 , как показано ниже:

3*x*1  27 

2*x*2  30 

*x*1  *x*2  20 

3*x*1  *x*3  27 ,

2*x*2  *x*4  30 ,

*x*1  *x*2  *x*5  20 ,

*х*1 *, х*2 *, х*3 *, х*4 *, х*5  0 .

Поскольку все ограничения имеют вид « », то дополнительные переменные вошли со знаком «+». Так как число ограничений равно трем, то число дополнительных переменных также равно трем.

Чтобы целевая функция не изменилась, коэффициенты перед введенными дополнительными переменными полагаем равными нулю:

*f*  2*x*1  *x*2  0  *x*3  0  *x*4  0  *x*5 ,

т. е. полагаем, что

*c*3  *c*4  *c*5  0. Таким образом, расширенная матри-

ца системы ограничений примет вид:

 3 0



 0 2



1

1



27





1

0 0

0 1 0

0 0 1

30 .

20



Пунктирным прямоугольником выделена единичная матрица, которую мы добавили. Эта единичная матрица дает начальное базис- ное решение (для чего она и вводится):

*f*  0*;*

0*;* 0*;* 27*;* 30*;* 20,

т. е.

*x*1  0,

*x*2  0 ,

*x*3  27 ,

*x*4  30 и

*x*5  20 . Это нулевое, тривиальное

решение редко является оптимальным (проверка на оптимальность рассмотрена ниже).

Заполняем нулевую симплекс-таблицу (табл. 2.5). Здесь А1, А2, А3, А4, А5, В – столбцы исходной матрицы (1).

Таблица 2.5

Нулевая симплекс-таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер симплекс- таблицы | Базис | *ci / cj* | *cj* | | | | | План В | Q\* |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| A1 | A2 | A3 | A4 | A5 |
| 0 | А3 | 0 | ***3*** | 0 | 1 | 0 | 0 | 27 | 9 |
| А4 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 30 | ∞ |
| А5 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 20 | 20 |
| 5   *j*  *ciai j*  *c j*  *i*3 | | -2 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |

\* Отношение плана к значениям элемента ведущего столбца.

Далее определяется симплекс-разница –

5

 *j*   *ci ai j*  *c j* . Всегда

*i*3

в нулевой симплекс-таблице сумма в симплекс-разнице (первое сла-

гаемое) равна нулю. Действительно, как следует из табл. 2.5, *ci* при-

нимают значения



*c*3  0;

*c*4  0 ;

*c*4  0 . Таким образом, симплекс-

разница равна

1  *c*1  2 .

*j*  *cj* . Поэтому, например, для первого столбца:

Поэтому обычно без каких-либо расчетов в эту строчку записы-

вают коэффициенты *c j* , взятые с обратным знаком. Либо рассуждают

так. В начальном базисном приближении целевая функция равна ну-

лю, так как виде:

*x*1  0,

*x*2  0. Поэтому переписывают целевую функцию в

*f*  2*x*1  *x*2  0  *x*3  0  *x*4  0  *x*5 ,

*;*

*f*  2*x*1  *x*2  0  *x*3  0  *x*4  0  *x*5  0 ,

*;*

0  2*x*1  *x*2  0  *x*3  0  *x*4  0  *x*5  0 .

И коэффициенты последнего уравнения заносят в последнюю строчку нулевой симплекс-таблицы.

Поэтому очень часто в симплекс-таблице вообще нет столбца

*c j / ci*

.

Далее, поскольку в нулевом базисном решении участвует еди-

ничная матрица с третьим, четвертым и пятым столбцами, в план за- писывают именно это базисное решение.

Полученное решение *f*  0*;* 0*;* 0*;* 27*;* 30*;* 20 хотя и удовлетво-

ряет всем ограничениям, но не является оптимальным, поскольку в последней строчке симплекс-таблицы присутствуют неположитель-

ные элементы. Чтобы план был оптимальным, необходимо, чтобы в последней строке не было неположительных элементов.

Геометрически это соответствует решению в начале координат –

точка *O* :

*O*0*;*0, *f* *O*  0.

Далее преобразовывают симплекс-таблицу по определенным

правилам так, чтобы в последней строке  2*;*1*;*0*;*0*;*0 не осталось не-

положительных элементов. (За один шаг, или за одну итерацию, обычно это сделать не удается, поэтому проводят несколько итераций по одним и тем же правилам).

Процесс итерации включает несколько шагов.

1. Определяют ведущий, или опорный столбец. При этом ориен- тируются на последнюю строку: выбирают тот столбец, для которого элемент последней строки имеет наименьшее значение. В нашем слу- чае это элемент *-2*, следовательно, ведущий – столбец А1.
2. В ведущем столбце выбирают ведущий элемент по следую- щему правилу. Ищут отношение элементов столбца *В* к соответст- вующим элементам ведущего столбца А1: 1. 27/3=9; 2. 30/0=;
3. 20/1=20. Эти значения заносят в последний столбец под названием

Q. Из полученных значений выбирают наименьшее. В нашем случае это 9, т. е. ведущий элемент находится на пересечении столбца А1 и строки А3 и равен *3*.

1. Составим первую симплекс-таблицу (табл. 2.6). Для этого все элементы ведущей строки делят на ведущий элемент, в нашем случае *3*. Результаты заносят в эту же строку первой симплекс-таблицы.

Таблица 2.6

Первая симплекс-таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер симплекс-  таблицы | Базис | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | План  В | Q |
| A1 | A2 | A3 | A4 | A5 |
| Исходная | А3 | ***3*** | 0 | 1 | 0 | 0 | 27 | 9 |
| А4 | *0* | 2 | 0 | 1 | 0 | 30 | ∞ |
| А5 | *1* | 1 | 0 | 0 | 1 | 20 | 20 |
|  | -2 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
|  | | | | | | | | |
| 1 | ***x***  ***1*** | 1 | *0* | 1/3 | 0 | 0 | 9 | ∞ |
| А4 | 0 | 2 | 0 | 1 | 30 | 30 | 15 |
| А5 | 0 | 1 | -1/3 | 0 | 1 | 11 | 11 |
|  | 0 | -1 | 2/3 | 0 | 0 | 18 |  |

1. Далее стремятся к тому, чтобы в остальных строках элементы столбца А1 стали равными нулю. В нашем случае во второй строке А4 на позиции столбца А1 уже стоит 0, поэтому с ней ничего делать не будем, а просто перепишем. В третьей строке А5 в столбце А1 стоит *1*. Очевидно, чтобы превратить ее в ноль, к ней нужно прибавить *-1*. Но прибавлять и отнимать что-либо произвольно нельзя. Прибавлять и отнимать следует только соответствующие элементы ведущей строки, умноженные на некоторый подобранный коэффициент. Поэтому ко всем элементам третьей строки прибавим соответствующие элементы ведущей строки, умноженные на *-1/3*.

Первый элемент ведущей строки *3* умножаем на *-1/3*, получаем *-1*, прибавляем к *1* (элемент столбца А1 третьей строки), получаем 0 и запи- сываем его на место элемента столбца А1 третьей строки. Дальше – ана- логично для всех других элементов.

Последний элемент ведущей строки *27* делим на *-3*, получаем *-9*, прибавляем к *20* (первый элемент третьей строки), получаем *11*, запи- сываем на место последнего элемента третьей строки первой сим- плекс-таблицы (см. табл. 2.6).

В столбце А1 последней строки стоит *-2.* Необходимо, чтобы вместо *-2* стоял *0*. Для этого нужно к *-2* прибавить *2*. Поэтому все элементы ведущей строки умножаем на *2/3* и прибавляем к соответст- вующим элементам третьей строки.

1. В результате преобразований в базисе должны остаться столбцы, для которых элементы в последней строке равнялись нулю. В исходной симплекс-таблице (см. табл. 2.5) в последней строке нули стояли в столбцах А3, А4 и А5. Именно поэтому они стояли как базис- ные. В первой симплекс-таблице (см. табл. 2.6) в последней строке у столбцов А4 и А5 нули остались, поэтому они остаются в базисе на своих местах.

Но у элемента А3 в последней строке стоит не ноль, а *2/3*. По- этому он не может быть базисным. В то же время у столбца А1 в по- следней строке появился ноль. Следовательно, теперь этот столбец

становится базисным на месте А3. Другое название этого столбца *x*1 ,

поэтому запишем *x*1 на место А3.

Следовательно, получим первое базисное приближение:

*f*  18*;* 9*;* 0*;* 0*;* 30*;*11.

Графически это соответствует решению в точке

*D*9*;*0,

*f* *D*  18

(см.

рис. 2.10). Но это решение еще не является оптимальным, поскольку в последней строке первой симплекс-таблицы есть еще неположитель- ные элементы. Поэтому первую симплекс-таблицу преобразовывают дальше, по тем же правилам, стремясь все так же, чтобы в последней строке не было неположительных элементов.

1. Определяем ведущий столбец, т. е. столбец с наименьшим значением элемента в последней строке. Это столбец А2 со значением элемента *-1*.
2. Выбираем ведущий элемент в ведущем столбце А1, для чего ищем значения Q (как и в исходной таблице). Заполняем столбец Q .

Получаем значения – *;*15*;*11. Выбираем наименьшее, т. е. *11*. Таким

образом, ведущий элемент – единица.

1. Третья, ведущая строка, остается без изменений, поскольку ведущий элемент уже равен единице. Без изменений остается и пер- вая строка, поскольку в ней элемент А2 уже равен нулю. Поэтому эти строки также переписываем без изменений.
2. Чтобы во второй строке элемент столбца А2 стал равным ну- лю, все элементы третьей строки умножим на *–2* и прибавим к соот- ветствующим элементам второй строки.

Чтобы элемент А2 последней строки стал равным нулю, ко всем элементам последней строки добавим соответствующие элементы третьей, ведущей строки.

1. У предыдущего базиса *x*1 в последней строке стоит ноль, по-

этому он остался на своем месте. У предыдущего базиса А4 в послед- ней строке стоит ноль, поэтому он также остался на своем месте. У предыдущего базиса А5 в последней строке стоит единица, поэтому он выбывает из базиса. Но теперь в последней строке ноль стоит у ба-

зиса А2. Поэтому он входит в базис вместо А5. Но базис А2 – это *x*2 ,

поэтому вместо А5 запишем *x*2 .

Таблица 2.7

Вторая симплекс-таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер  симплекс-таблицы | Базис | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | План  В | Q |
| A1 | A2 | A3 | A4 | A5 |
| Исходная | А3 | ***3*** | 0 | 1 | 0 | 0 | 27 | 9 |
| А4 | *0* | 2 | 0 | 1 | 0 | 30 | ∞ |
| А5 | *1* | 1 | 0 | 0 | 1 | 20 | 20 |
|  | -2 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
| 1 | ***x***  ***1*** | 1 | *0* | 1/3 | 0 | 0 | 9 | ∞ |
| А4 | 0 | 2 | 0 | 1 | 30 | 30 | 15 |
| А5 | 0 | 1 | -1/3 | 0 | 1 | 11 | 11 |
|  | 0 | -1 | 2/3 | 0 | 0 | 18 |  |
| 2 | ***x***  ***1*** | 1 | 0 | 1/3 | 0 | 0 | 9 |  |
| А4 | 0 | 0 | 2/3 | 1 | -2 | 8 |  |
| ***x***  ***2*** | 0 | 1 | -1/3 | 0 | 1 | 11 |  |
|  | 0 | 0 | 1/3 | 0 | 1 | 29 |  |

Во второй симплекс-таблице (табл. 2.7) в последней строке нет неположительных значений, поэтому полученный план является оп- тимальным. Итак,

*f*  29*;* 9*;*11*;* 0*;* 8*;* 0.

Графически это решение соответствует точке

*C*9*;*11 и

*f* *C*   29

(рис. 2.11). При решении экономических задач, направленных на оп- тимизацию ресурсного распределения, с помощью симплексного ме- тода базисные переменные А3, А4, А5 выражают соответственно оста- ток ресурсов S1, S2, S3 .

Для уяснения экономического смысла перепишем отдельно ито- говую симплекс-таблицу (табл. 2.8).

Таблица 2.8

Итоговая симплекс-таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базисные  переменные | Переменные | | | | | Правая  часть | Комментарий |
|  | *x*1 | *x*2 | *S*1 | *S*2 | *S*3 | *B* |  |
| *x*1 | 1 | 0 | 1/3 | 0 | 0 | 9 | Значение *x*1 |
| *S*2 | 0 | 0 | 2/3 | 1 | -2 | 8 | Значение ресурса *S*2 |
| *x*2 | 0 | 1 | -1/3 | 0 | 1 | 11 | Значение *x*2 |
| Целевая функция *f* | 0 | 0 | 1/3 | 0 | 1 | 29 | Максимальное  значение прибыли |

1. Из табл. 2.8 видно, что ресурсы *S*1 и *S*3 расходуются полно-

стью и являются дефицитными (их нет в столбце *B* ), так как только

на пересечении строки ресурса.

*S*2 и столбца *В* есть значение остатка запаса

1. Также видно, что остаток ресурса *S*2 = 8.
2. Теневая цена для ограничения 1 – первая строка – составляет 1/3. То есть, если реализуется 1кг ресурса для первого ограничения сверх нормы, прибыль возрастет на 1/3 условных единицы. Необхо- димо иметь в виду, что так называемая теневая цена никакого отно- шения к рыночной цене не имеет. Это своя «ценность» внутри данной фирмы.
3. Теневая цена для ограничения 3 – третья строка – составляет - 1/3. То есть, если реализуется 1 кг ресурса третьего ограничения сверх нормы, прибыль уменьшится на 1/3 условных единицы.

### Анализ чувствительности итоговой симплекс-таблицы

Анализ чувствительности итоговой симплекс-таблицы позволя- ет определить, насколько возможно улучшить полученное решение, а также степень его устойчивости.

Рассмотрим алгоритм анализа на примере итоговой симплекс- таблицы 2.8.

1. Влияние на оптимальное решение задачи сверхнормативного

запаса ресурса *S*1 в количестве 1 кг.

1. Влияние на оптимальное решение задачи сверхнормативного

запаса ресурса *S*1 в количестве 2 кг.

1. Влияние на оптимальное решение задачи увеличения запаса

ресурса *S*3 на 5 кг.

1. Максимальное дополнительное количество ресурса *S*3 , кото-

рое используется полностью и не приводит к созданию излишка ре- сурса.

1. Влияние на оптимальное решение задачи уменьшения запаса

ресурса *S*1 в количестве 2 кг.

1. Модифицированные элементы итоговой симплекс-таблицы

при наличии 1 кг ресурса

*S*1 дополнительно представлены в табл. 2.9.

Таблица 2.9

Модифицированные элементы итоговой симплекс-таблицы при наличии 1 кг ресурса S1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базисные переменные | Теневые цены | | | | | План  *B* | Модифицированный план В |
| *x*1 | *x*2 | *S*1 | *S*2 | *S*3 |
| *x*1 | 1 | 0 | 1/3 | 0 | 0 | 9 | 9+1/3= 9 1  3 |
| *S*2 | 0 | 0 | 2/3 | 1 | -2 | 8 | 8+2/3= 8 2  3 |
| *x*2 | 0 | 1 | -1/3 | 0 | 1 | 11 | 11-1/3=10 2  3 |
| Целевая функция  *f* | 0 | 0 | 1/3 | 0 | 1 | 29 | 29+1/3= 29 1  3 |

Согласно правилам преобразования матриц, к элементам одного столбца можно добавлять элементы другого столбца, умноженные на какой-либо коэффициент. При этом определитель получившейся мат- рицы будет равен определителю исходной матрицы.

Это правило применимо и к столбцу *B* , к которому добавили

соответствующие элементы столбца ный столбец *B* .

*S*1 и получили модифицирован-

Если запас первого ресурса увеличить на одну треть, запас третьего ресурса уменьшить на одну треть, то целевая функция воз-

растет на одну треть, а неиспользованный запас ресурса на две трети.

*S*2 возрастет

Графически (рис. 2.12) это означает, что ограничение 1 –

3*x*1

 27 ,

*x*1  9

станет

*x*  9 1 . Координаты точки *C* станут

 *x*1  *x*2  20 ,

3

1

*C*1 :

*x*  28  9*,*33 ,

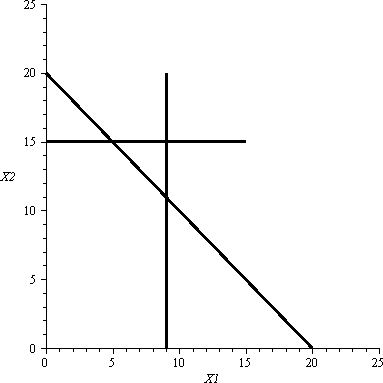
 1 3

*C* 9*,*33*;*10*,*66.

1

То есть *x*  28  91 , *x*  32  10 2 .

1 3 3 2 3 3



х1=9

А

2

В

x1=91/3

С(9;11)

*C*' 9 1 ;10 2 





3 3 



1

(1’)

(3)

D

О

Рис. 2.12. Модифицированное решение задачи при наличии 1 кг ресурса S1 дополнительно

Целевая функция станет равной:

*f* *C*   2*x*  *x*

 2  28  32  88  87  1  291 .

1 1 2

3 3 3 3 3

Таким образом, получили всё то, что отражено в модифициро- ванной симплекс-таблице.

1. Модифицированные элементы итоговой симплекс-таблицы при наличии 2 кг ресурса S1 дополнительно представлены в табл. 2.10.

Таблица 2.10 Модифицированные элементы итоговой симплекс-таблицы

при наличии 2 кг ресурса S1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базисные  переменные | Переменные | | | | | Правая  часть | Правая часть,  модифицированные В |
|  | *x*1 | *x*2 | *S*1 | *S*2 | *S*3 | *B* | 9+2/3= 9 2  3 |
| *x*1 | 1 | 0 | 1/3\*2 | 0 | 0 | 9 | 8+4/3= 9 1  3 |
| *S*2 | 0 | 0 | 2/3\*2 | 1 | -2 | 8 | 11-2/3=10 1  3 |
| *x*2 | 0 | 1 | -1/3\*2 | 0 | 1 | 11 | 29+2/3= 29 2  3 |
| Целевая функция  *f* | 0 | 0 | 1/3\*2 | 0 | 1 | 29 | 9+2/3= 9 2  3 |

Пояснения те же. Геометрическая интерпретация будет той же самой. Но при этом нам не нужно бесконечно пересчитывать графики, точки и т.д.

Графически (рис. 2.13) это означает, что ограничение 1– 3*x*1  27,

*x*1  9

станет

*x*  9 2 . Координаты точки C станут C’:

1 3

 *x*1  *x*2  20 ,

*x*  29  9 2 ,

 1 3 3

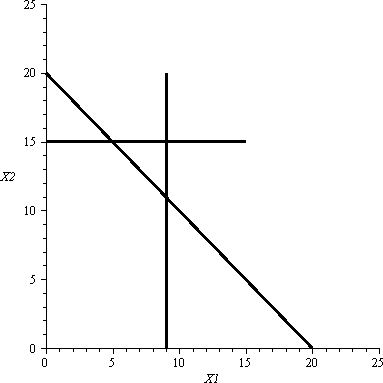
 2 1 

*C'* 9  *;*10   .

 3 3 

То есть *x*  29  9 2 , *x*  31  10 1 .

1 3 3 2 3 3



х1=9

А

2

В

x1=92/3

С(9;11)

*C* ' 9 2 ;10 1 





3 3 



1

(1’)

(3)

D

О

Рис. 2.13. Модифицированное решение задачи при наличии 2 кг ресурса S1 дополнительно

Целевая функция станет равной:

*f* *C*   2*x*  *x*

 2  29  31  89  87  2  29 2 .

1 1 2

3 3 3 3 3

Таким образом, получили то, что отражено в модифицирован- ной симплекс-таблице.

1. Модифицированные элементы итоговой симплекс-таблицы (при увеличении на 5 кг ресурса S3) представлены в табл. 2.11.

Таблица 2.11 Модифицированные элементы итоговой симплекс-таблицы

при увеличении на 5 кг ресурса S3

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базисные переменные | Теневые цены | | | | | План В | Модифицирован- ный план В |
| *x*1 | *x*2 | *S*1 | *S*2 | *S*3 |
| *x*1 | 1 | 0 | 1/3 | 0 | 0\*5 | 9 | 9 + 0 = 9 |
| *S*2 | 0 | 0 | 2/3 | 1 | -2\*5 | 8 | 8 – 10 = -2 |
| *x*2 | 0 | 1 | -1/3 | 0 | 1\*5 | 11 | 11 + 5 = 16 |
| Целевая функция *f* | 0 | 0 | 1/3 | 0 | 1\*5 | 29 | 29 + 5 = 34 |

При этом значение

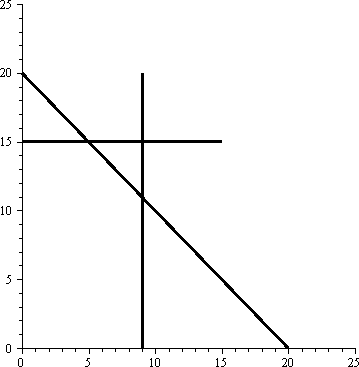
*x*1 осталось прежним, *x*2

возросло до 16, це-

левая функция возросла до 34.

Геометрически (рис. 2.14) это означает следующее.

х1



х2

А

С1(9;16)

В

2

С(9;11)

3’

1

3

D

О

Рис. 2.14. Модифицированное решение задачи при увеличении на 5 кг ресурса S3

*S*3 – третье ограничение (прямая 3 на рис. 2.13), уравнение кото- рого имеет вид:

*x*1  *x*2  20 .

При увеличении ресурса *S*3 на 5 кг это ограничение примет вид:

*x*1  *x*2  25 .

Новая точка *C*1

шим систему:

будет лежать на пересечении прямых 3’ и 1. Ре-

*x*1  *x*2  25 ,



 3*x*1

 27 .

Откуда

*C* 9*;*16, соответственно,

*f* *C*   2*x*  *x*

1

 2  9 16  34 .

1 1 2

Однако точка С1(9; 16) лежит выше ограничения 2, а это означа- ет, что ресурса 2 будет недостаточно для данного производственного плана.

Все эти данные отражены в симплекс-таблице (табл. 2.12).

Таблица 2.12 Определение максимального дополнительного

количества ресурса S3

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базисные переменные | Теневые цены | | | | | План В | Модифицированный план В |
| *x*1 | *x*2 | *S*1 | *S*2 | *S*3 |
| *x*1 | 1 | 0 | 1/3 | 0 | 0\**r* | 9 | 9 + 0 = 9 |
| *S*2 | 0 | 0 | 2/3 | 1 | -2\**r* | 8 | 8 – 2\**r* = 0 |
| *x*2 | 0 | 1 | -1/3 | 0 | 1\**r* | 11 | 11 + 5 = 16 |
| Целевая функция *f* | 0 | 0 | 1/3 | 0 | 1\**r* | 29 | 29 + 5 = 34 |

сурса

1. Определение максимального дополнительного количества ре-

*S*3 , которое используется полностью и не приводит к созданию

излишка ресурса.

Для этого умножим значения столбца *S*3

на такой множитель

(см. табл. 2.12) *r*, чтобы в правой части модифицированной таблицы

ресурс

*S*2 равнялся нулю:

8   2 *r*  0 .

Отсюда

*r*  4 .

Подставив значение табл. 2.13.

*r*  4 , получим данные, представленные в

Таблица 2.13

Изменение ресурса S3

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базисные переменные | Теневые цены | | | | | План В | Модифицированный план В |
| *x*1 | *x*2 | *S*1 | *S*2 | *S*3 |
| *x*1 | 1 | 0 | 1/3 | 0 | 0\**4* | 9 | 9 + 0 = 9 |
| *S*2 | 0 | 0 | 2/3 | 1 | -2\**4* | 8 | 8 – 2\**4* = 0 |
| *x*2 | 0 | 1 | -1/3 | 0 | 1\**4* | 11 | 11 + 5 = 16 |
| Целевая функция *f* | 0 | 0 | 1/3 | 0 | 1\**4* | 29 | 29 + 4 = 33 |

При этом ограничение 3 будет иметь вид:

*x*1  *x*2  20  4  24. Геометрически это означает следующее. Уравнение третьего ограничения стало иметь вид:

*x*1  *x*2  24.

Новая точка *C*2 (рис. 2.15) будет лежать на пересечении прямой 3” и

прямой 1. То есть для нахождения координат точки *C*2

систему

надо решить

*x*1  *x*2  24 ,



 3*x*1

 27 .

Откуда

2

*C* 9*;*15 и, соответственно,

*f* *C*

2

  2*x*

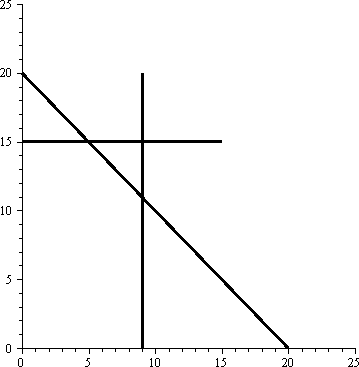
 *x*2

 2  9  15  33.

Все эти данные отражены в симплекс-таблице (см. табл. 2.13).

1

х2



А

С2(9;15)

В

2

С(9;11)

1

D

3

О

х1

Рис. 2.15. Модифицированное решение задачи при r = 4

1. Модифицированные элементы итоговой симплекс-таблицы

при уменьшении на 2 кг ресурса

*S*1 представлены в табл. 2.14.

Таблица 2.14

Изменение ресурса S1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базисные переменные | Теневые цены | | | | | План В | Модифицированный план В |
| *x*1 | *x*2 | *S*1 | *S*2 | *S*3 |
| *x*1 | 1 | 0 | 1/3\*2 | 0 | 0 | 9 | 9-2/3= 27  2  25  81  3 3 3 3 |
| *S*2 | 0 | 0 | 2/3\*2 | 1 | -2 | 8 | 8-4/3= 24  4  20  6 2  3 3 3 3 |
| *x*2 | 0 | 1 | -1/3\*2 | 0 | 1 | 11 | 11+2/3= 33  2  35  10 2  3 3 3 3 |
| Целевая функция *f* | 0 | 0 | 1/3\*2 | 0 | 1 | 29 | 29-2/3= 87  2  85  281  3 3 3 3 |

# 2.3. Решение ЗЛП в приложении Excel МS Office

Симплекс-метод дает возможность решать ЗЛП с любым числом переменных. При этом можно анализировать чувствительность полу- ченного решения. Однако объем необходимых вычислений резко увеличивается с ростом числа переменных, что ограничивает его применение.

В настоящее время имеются математические программы, кото- рые автоматизируют процесс вычисления симплекс-методом. В част- ности, такая программа заложена в приложении Excel программы Microsoft Office.

Мощным средством анализа данных Excel является надстройка Solver (Поиск решения). С ее помощью можно определить, в частно- сти, при каких значениях указанных влияющих ячеек формула в це- левой ячейке принимает нужное значение (минимальное, максималь- ное или равное какой-либо величине).

Для процедуры поиска решения можно задать ограничения, причем необязательно использовать те же влияющие ячейки. Для рас- чета заданного значения применяются различные математические ме- тоды поиска. Можно установить режим, при котором полученные

значения переменных автоматически заносятся в таблицу. Кроме того, результаты работы программы могут быть оформлены в виде отчета.

Программа «Поиск решений» (в оригинале Excel Solver) допол- нительная надстройка табличного процессора MS Excel, которая предназначена для решения определенных систем уравнений, линей- ных и нелинейных задач оптимизации, используется с 1991 г.

Размер задачи, которую можно решить с помощью базовой вер- сии этой программы, ограничивается такими предельными показате- лями:

* количество неизвестных (decision variable) – 200;
* количество формульных ограничений (explicit constraint) на неизвестные – 100;
* количество предельных условий (simple constraint) на неиз- вестные – 400.

Благодаря мировой популярности табличного процессора MS Excel встроенная в его среду программа Solver является наиболее распространенным инструментом для поиска оптимальных решений в сфере современного бизнеса.

По умолчанию в Excel надстройка «Поиск решения» отключена. Чтобы активизировать ее в Excel 2013 необходимо щелкнуть значок

«ФАЙЛ» в книге Excel, затем «Параметры» и выбрать категорию

«Надстройки». В поле «Надстройки Excel» и нажать кнопку «Перей- ти». В поле «Доступные надстройки» установить флажок рядом с пунктом «Поиск решения» и нажать кнопку «ОК» (рис. 2.16).

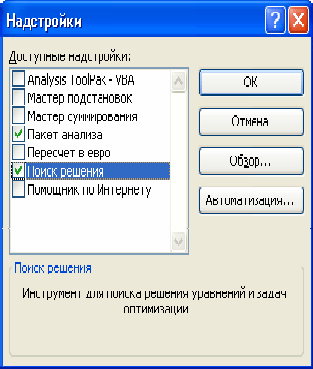


Рис. 2.16. Заключительный этап включения надстройки

«Поиск решения» в Office 2003

В Excel 2003 выбрать команду «Сервис/Надстройки», в появив- шемся диалоговом окне «Надстройки» установить флажок «Поиск решения» и щелкнуть кнопку «ОК». Если вслед за этим на экране появится диалоговое окно с предложением подтвердить Ваши наме- рения, щелкните на кнопке «Да». (Возможно, понадобится устано- вочный компакт-диск Office).

*Процедура поиска решения*

1. Предположим, что некоторая фабрика выпускает «Товар А» и «Товар В». На это она тратит «Ресурс 1», «Ресурс 2», «Ресурс 3» и «Ресурс 4». Известны цены товаров и потребности ресурсов для их выпуска. Эти данные заносим в таблицу Excel, как показано на рис. 2.17.

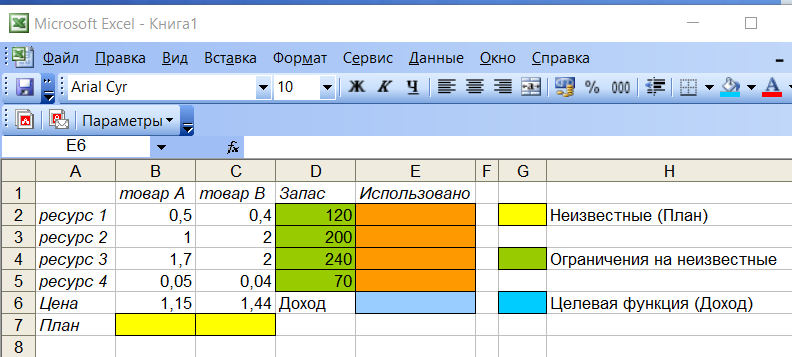


Рис. 2.17. Постановка задачи

1. Выделяем целевую ячейку (в нашем случае Е6), которая должна принять необходимое значение и выбираем команду – *fx*. В появившемся меню выбираем команду «СУММПРОИЗВ» и нажима- ем «ОК», как показано на рис. 2.18.

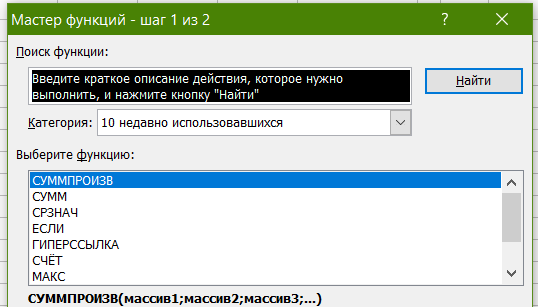


Рис. 2.18. Выбор функции

1. После этого выпадет меню, в котором нужно выбрать пере- множаемые массивы. В нашем случае перемножается массив от ячей- ки В6 до ячейки С6 (цена) на массив от ячейки $B$7 до ячейки $С$7 (план). Знак $ обозначает, что содержимое ячеек будет меняться. Эта процедура показана на рис. 2.19.

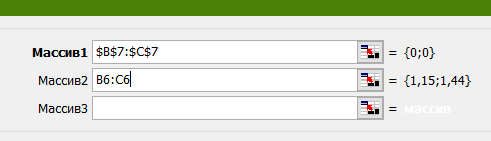


Рис. 2.19. Выбор перемножаемых массивов

1. Нажимаем «ОК». В ячейке Е6 (ЦФ) появится «0». Копируем этот «0» и вставляем во все ячейки «Использовано». Обновившаяся таблица в Excel представлена на рис. 2.20.

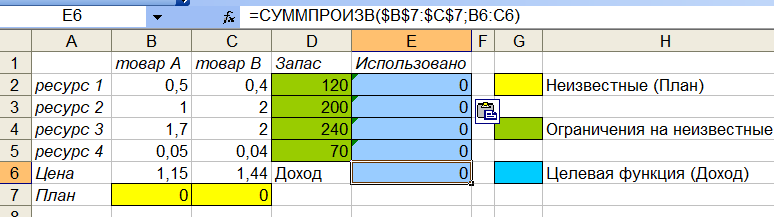


Рис. 2.20. Подготовленная таблица

1. Снова выделяем целевую ячейку (Е6), которая должна при- нять необходимое значение, и выбираем команду: в Excel 2007 Дан- ные/Анализ/Поиск решения; в Excel 2003 Tools > Solver (Сервис > Поиск решения). Поле Set Target Cell (Установите целевую ячейку) открывшегося диалогового окна надстройки Solver (Поиск решения) будет содержать адрес целевой ячейки.
2. Устанавливаем переключатель Equal To (Равной), задающий значение целевой ячейке – Max (максимальное значение, задача на максимум), или Min (минимальное значение, задача на минимум) или Value of (конкретное значение) (рис. 2.21).

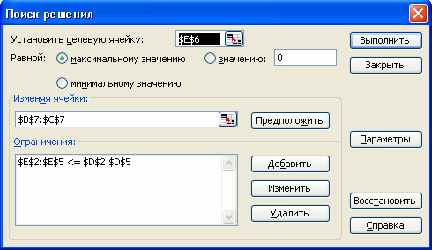


Рис. 2.21. Задание ячеек ЦФ и типа оптимизации

Устанавливаем в поле By Changing Cells (Изменяя ячейки), в ка- ких ячейках программа должна изменять значения в поисках опти- мального результата. В нашем случае это массив от ячейки $B$7 до ячейки $С$7. Создаём ограничения в списке Subjekt to the Constraint (ограничения). Для этого щелкаем по кнопке Add (добавить) и в диа- логовом окне определяем ограничения. В нашем случае данные столбца Е «Использовано» от Е2 до Е5 не должны превышать данных столбца D «Запас».

1. Щелкаем по кнопке Options (Параметры) и в появившемся ок- не устанавливаем переключатель «Неотрицательные значения» (если переменные должны быть положительными числами), «Линейная мо- дель», если решаемая задача – линейная, как показано на рис. 2.22.

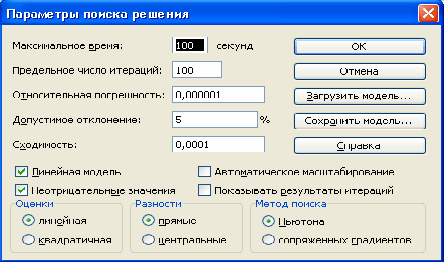


Рис. 2.22. Выбор модели

Щелкаем по кнопке «ОК», запуская процесс счёта.

1. Когда появится диалоговое окно Solver Results (Результаты поиска решения), выбраем переключатель Keep Solve Solution (Со- хранить найденное решение) или Restore Original Values (Восстано- вить исходные значения), а также тип отчёта (рис. 2.23).

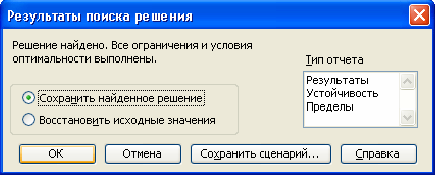


Рис. 2.23. Сохранение решения

1. Нажимаем кнопку «ОК». Практически мгновенно происходит поиск оптимального решения и в таблице мы видим результаты счёта, как показано на рис. 2.24.

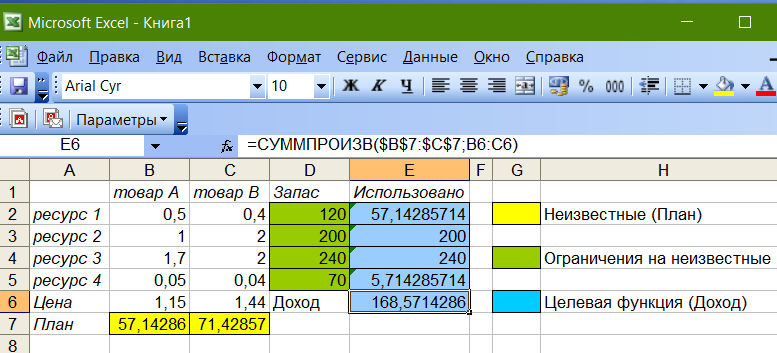


Рис. 2.24. Решение задачи

Максимальное значение ЦФ получается равным 168 условных единиц, при этом надо выпускать 57 единиц товара А и 71 единицу товара В.

*Параметры средств «Поиска решений»*

*Максимальное время* – служит для ограничения времени, отпу- щенного на поиск решения задачи. В этом поле можно ввести время в секундах, не превышающее 32 767 (примерно девять часов); значение

100, используемое по умолчанию, вполне приемлемо для решения большинства простых задач.

*Предельное число итераций* – управляет временем решения за- дачи путем ограничения числа вычислительных циклов (итераций).

*Относительная погрешность* – определяет точность вычисле- ний. Чем меньше значение этого параметра, тем выше точность вы- числений.

*Допустимое отклонение* – предназначено для задания допуска на отклонение от оптимального решения, если множество значений влияющей ячейки ограничено множеством целых чисел. Чем больше значение допуска, тем меньше времени требуется на поиск решения.

*Сходимость* – применяется только к нелинейным задачам. Ко- гда относительное изменение значения в целевой ячейке за последние пять итераций становится меньше числа, указанного в поле «Сходи- мость», поиск прекращается.

*Линейная модель* – служит для ускорения поиска решения путем применения к задаче оптимизации линейной модели. Нелинейные модели предполагают использование нелинейных функций, фактора роста и экспоненциального сглаживания, что замедляет вычисления.

*Неотрицательные значения* – позволяет установить нулевую нижнюю границу для тех влияющих ячеек, для которых не было за- дано соответствующее ограничение в диалоговом окне «Добавить ог- раничение».

*Автоматическое масштабирование* – используется, когда числа в изменяемых ячейках и в целевой ячейке существенно различаются.

*Показывать результаты итераций* – приостанавливает поиск решения для просмотра результатов отдельных итераций.

*Загрузить модель* – после щелчка на этой кнопке открывается одноименное диалоговое окно, в котором можно ввести ссылку на диапазон ячеек, содержащих модель оптимизации.

*Сохранить модель* – служит для отображения на экране одно- именного диалогового окна, в котором можно ввести ссылку на диа- пазон ячеек, предназначенный для хранения модели оптимизации.

*Оценка линейная* – переключатель для работы с линейной мо- делью.

*Оценка квадратичная* – переключатель для работы с нелиней- ной моделью.

*Разности прямые* – используется в большинстве задач, где ско- рость изменения ограничений относительно невысока. Увеличивает скорость работы средства «Поиск решения».

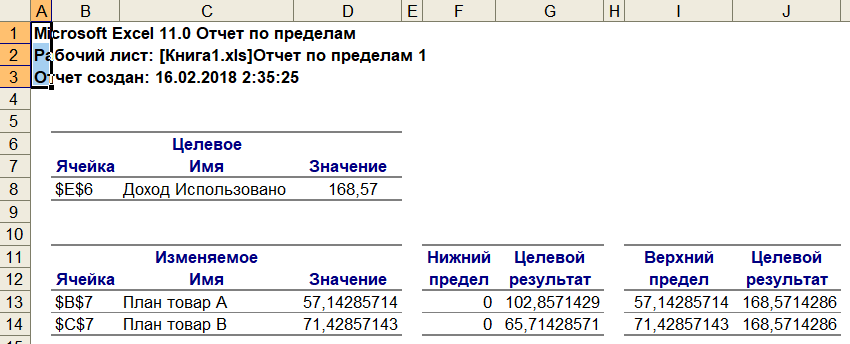
*Разности центральные* – используется для функций, имеющих разрывную производную. Данный способ требует больше вычисле- ний, однако его применение может быть оправданным, если выдано сообщение о том, что получить более точное решение не удается.

*Метод поиска Ньютона* – требует больше памяти, но выполняет меньше итераций, чем в методе сопряженных градиентов.

*Метод поиска сопряженных градиентов* – реализует метод со- пряженных градиентов, для которого требуется меньше памяти, но выполняется больше итераций, чем в методе Ньютона. Данный метод следует использовать, если задача достаточно большая и необходимо экономить память или если итерации дают слишком малое отличие в последовательных приближениях.

Рассмотрим три типа отчёта, создаваемых с помощью приложе- ния Excel.

Первый вид отчёта – отчет по пределам (рис. 2.25) – состоит из двух частей: целевой функции (Целевая ячейка) и плана (Изменяемые ячейки).



1

4

5

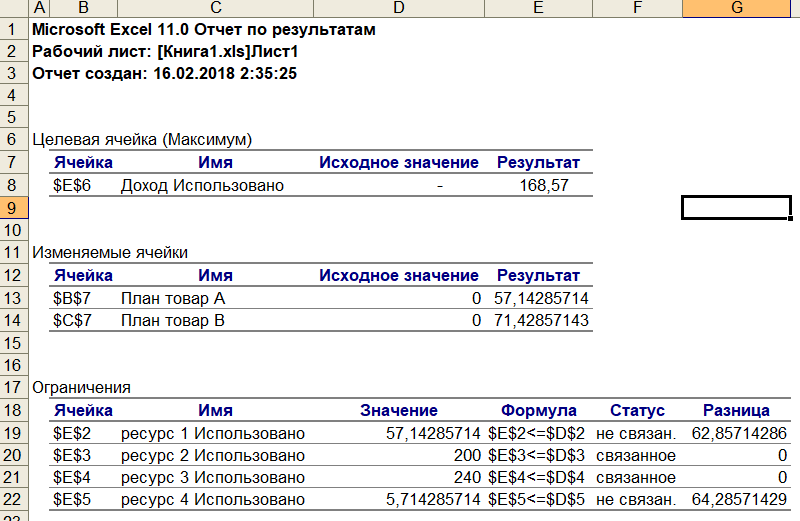
6

2

3

Рис. 2.25. Отчёт по пределам: 1 – значение ЦФ (Доход); 2 – оптимальный план задачи; 3 – наименьшее значение, которое может принять неизвестное (в нашем случае количество товара А и Б имеет нижний предел ноль, поскольку в пара- метрах Поиска решений отметили неотрицательные значения); 4 – значение, ко- торое будет в целевой ячейке (Доход), если неизвестное будет равно Нижнему пределу; 5 – наибольшее значение, которое может содержать неизвестные, что- бы получить максимальную ЦФ; 6 – значение, которое будет в целевой ячейке (Доход), если неизвестные будут равны Верхнему пределу

Второй вид отчёта (рис. 2.26) – отчет по результатам – содержит информацию о трех компонентах задачи оптимизации: целевой функ- ции (Целевая ячейка), плана (Изменяемые ячейки) и ограничений (Ограничения).



1

2

3

4

5

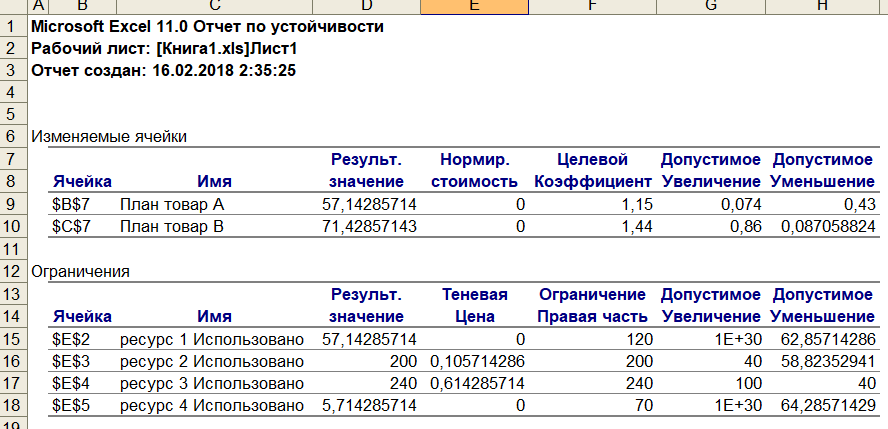
6

7

8

Рис. 2.26. Отчёт по результатам: 1 – начальное значение целевой функции при на- чальном, опорном плане; 2 – максимальное или минимальное значение (в зависи- мости от задачи) целевой функции (в нашем случае – 168,57 денежных единиц); 3 – начальный опорный план; 4 – оптимальный план задачи. В нашем случае, что- бы получить максимальную выручку в размере 168,37 денежных единиц, нужно производить 57,14 единиц товара А и 71,43 единиц товара Б (понятно, что товар должен быть в целых единицах, но если бы мы задали такой параметр, то не полу- чили отчеты, которые нужны для анализа и улучшения полученных результатов); 5 – показывает количество использованных ресурсов на производство при опти- мальном плане; 6 – формулы ограничений; 7 – показывает влияние ограничений на конечный результат. Если статус «связанное», тогда данное ограничение влия- ет на полученный план, если «не связан» – значит не влияет. В нашем случае ре- сурс 1 и 4 имеют статус «не связан» – это значит, что эти ресурсы не ограничива- ют возможности в производстве, что не скажешь про ресурс 2 и 3, которые ис- пользованы полностью; 8 – разница между имеющимся в наличии количеством ресурсов и использованных при полученном плане (см. рис. 2.22)

Третий вид отчёта (рис. 2.27) – отчет по устойчивости – состоит из тех же частей, что и отчет по результатам.



1

2

3

4

5

7

8

9

6

10

Рис. 2.27. Отчёт по устойчивости: 1 – оптимальный план задачи (в нашем случае, чтобы получить максимальную выручку в размере 168,37 денежных единиц, нужно производить 57,14 единиц товара А и 71,43 единиц товара Б); 2 – норми- рованная стоимость касается неизвестных значений плана. Иначе термин

«reduced cost» можно перевести как «цена, которая уменьшает (целевую функ- цию)». Он показывает, как изменится оптимальное значение целевой функции при выпуске продукции, которой нет в оптимальном плане. Например, если нормированная стоимость товара А была бы 3 (хотя в нашем случае это 0), то принудительный выпуск двух единиц товара А, которых нет в оптимальном пла- не, привел бы к уменьшению Дохода на 2\*3=6 и составлял бы 168,57–6= 162, 57 денежных единиц; 3 – коэффициенты целевой функции; 4, 5 – границы измене- ний значений коэффициентов целевой функции при условии, что количество оптимальной продукции (план) не изменится. Например, если целевой коэффи- циент товара А (КА) равен 1,15 (цена за 1 единицу товара), то при изменении его в рамках 1,15–0,43<КА<1,15+0,074>0,72< КА<1,224 план не изменится, но значение дохода может уменьшиться или увеличиться. Это можно проверить, если запустить программу «Поиск решений» после внесений в таблицу измене- ний данного коэффициента; 6 – количество использованных ресурсов; 7 – тене- вая цена (в нелинейной модели это множитель Лагранжа) касается ограничений, т. е. определенное значение указывает на «ценность» ограниченного ресурса в сравнении с другими ресурсами. Этот показатель указывает, как изменится оп- тимальное значение целевой функции (Доход) при изменении запасов ресурсов на 1 единицу. Например, если увеличить запас ресурса 3 на 10 единиц, то доход увеличится на 10\*0,61=6,1 и будет составлять 168,57+6,1=174,67 денежных еди- ниц; 8 – запасы ресурсов; 9, 10 – задают диапазон для 8, в котором действует те- невая цена 7 (аналогично 4, 5). Например, диапазон ресурса 3: 200<ресурс 3<340. Если ресурс 3 увеличить на 10 единиц, то доход увеличится на 6,1 и будет составлять 174,67. Если этот ресурс увеличить на 110 единиц, то о доходе ничего сказать нельзя, поскольку значение третьего ресурса выйдет за указанные пределы

Для конечного результата оптимизации нужен только отчет по устойчивости плана, поскольку он содержит наиболее существенную информацию.

Рассмотрим еще один пример задачи на поиск оптимального решения с помощью Excel – 2013.

Предположим, перед нами стоит задача оптимизировать работу некоторой фабрики, которая выпускает некоторую продукцию – х1, х2, х3, х4 по цене – 3000, 4000, 3000, 1000 рублей соответственно. Фабрика обладает необходимыми ресурсами – р1, р2, р3. Количество каждого ресурса для иготовления каждого продукта представлено в табл. 2.15.

Таблица 2.15

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ресурсы | х1 | х2 | х3 | х4 | Запас |
| р1 | 7 | 2 | 2 | 6 | 80 |
| р2 | 5 | 8 | 4 | 3 | 480 |
| р3 | 2 | 4 | 1 | 8 | 130 |
| Цена | 3000 | 4000 | 3000 | 1000 |  |

На основании этой таблицы, заполняем таблицу в Excel (рис. 2.28).

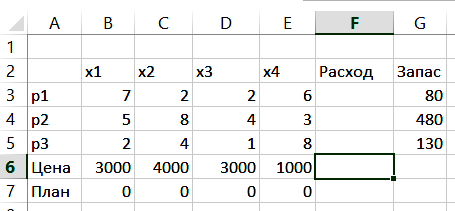


Рис. 2.28. Исходная таблица в Excel

По сравнению с предыдущей таблицей здесь вставлен ещё один столбец «Расход», куда программа будет заносить израсходованное количество каждого ресурса, и ещё одна строка «План», куда будет

заноситься количество выпускаемой продукции. Сейчас здесь ничего нет, поскольку мы ещё не запускали программу.

Для записи значений целевой функции (ЦФ) назначим ячейку

F6. Наводим курсор на эту ячейку и нажимаем символ

*fx* . В выпа-

дающем меню выбираем функцию «СУММАПРОИЗВ», как показано на рис. 2.29.

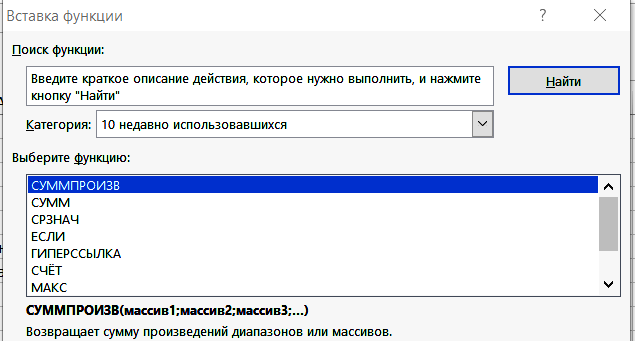


Рис. 2.29. Выбор функции

Нажимаем «ОК» после этого выпадает ещё одно меню, в кото- рое мы записываем перемножаемые массивы, как показано на рис.2.30.



Рис. 2.30. Задания перемножаемых массивов

Здесь символом «$» обозначены ячейки, данные которых будут изменяться в процессе счёта. В нашем случае это строка 7, оптималь- ный план выпуска изделий. Без этого символа – массив с постоянным значением элементов, в нашем случае это строка 6, цена изделия. На- жимаем «ОК» и в ячейке F6 появляется ноль. Этот ноль мы копируем и вставляем во все клетки графы «Расход».

Теперь надо запустить программу для счета. Для этого наводим курсор на ячейку F6 (ЦФ) и на вкладке «ДАННЫЕ» нажимаем кнопку

«Поиск решения».

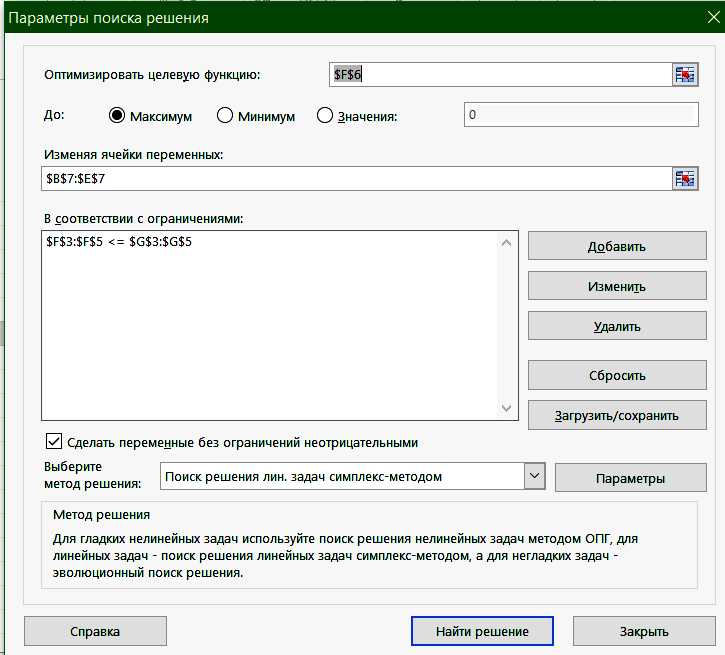


Рис. 2.31. Меню запуска программы

В выпадающем меню (рис. 2.31) назначаем ещё раз ЦФ, пере- менные ячейки, ограничения (в нашем случае все ячейки столбца F должны быть меньше соответствующих ячеек столбца G), устанавли-

ваем поиск оптимального решения на максимум. После этого нажи- маем кнопку «Найти решение».

В выпадающем меню (рис. 2.32) выбираем «сохранить найден- ное решение» и сохранить отчёты: «Результаты», «Устойчивость» и

«Пределы».

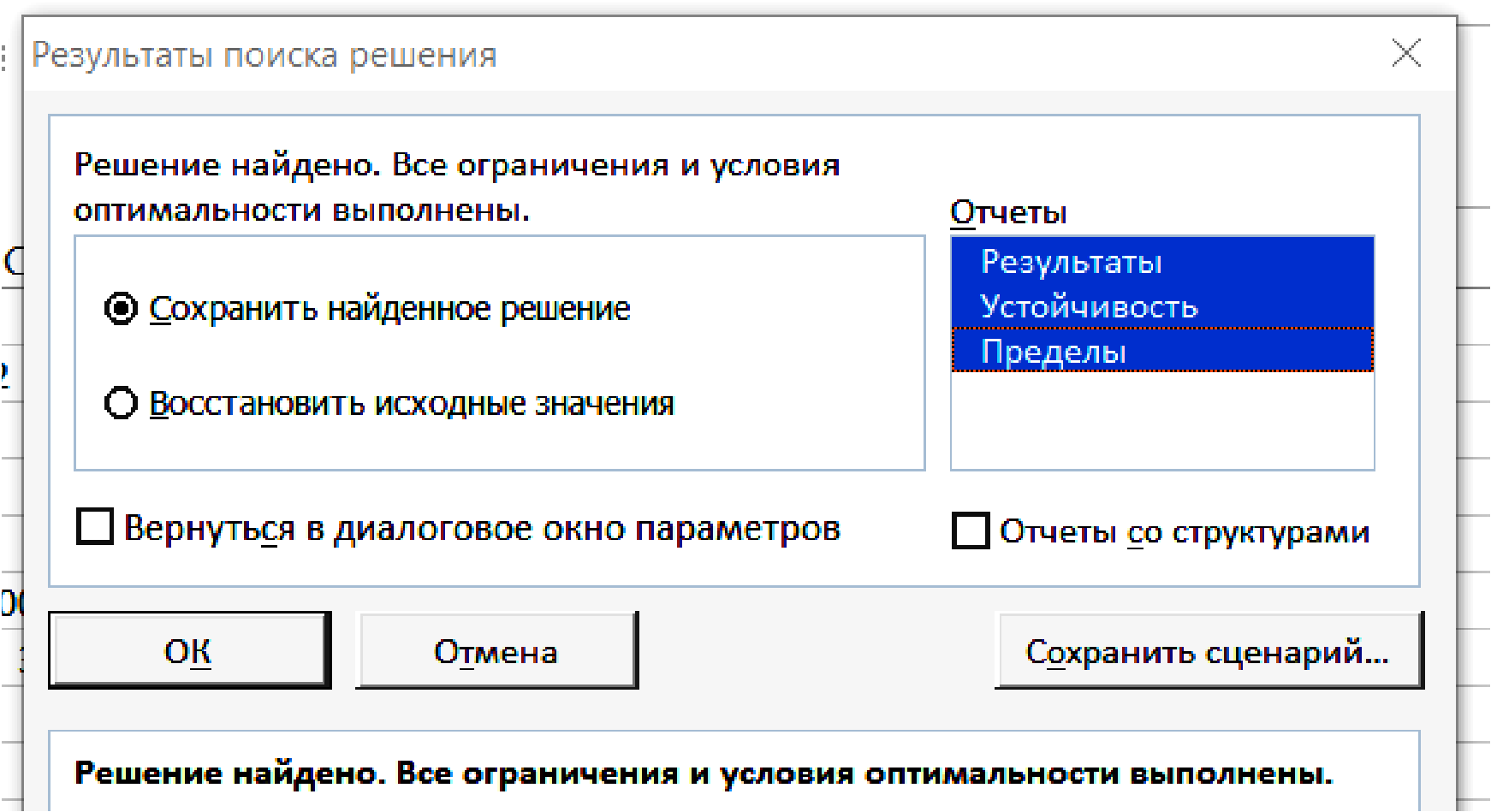


Рис. 2.32. Меню «решение найдено»

Нажимаем «ОК», открывается таблица со всеми заполненными клетками, т.е. найденным оптимальным решением, как показано на рис. 2.33.

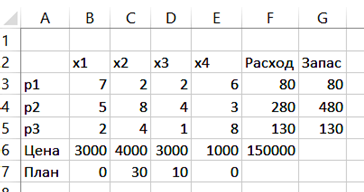


Рис. 2.33. Таблица с оптимальным решением

Мы видим, что максимальная выручка при оптимальном плане выпуска товаров будет равна 150000 условных единиц, если выпус- кать 30 единиц товара «х2» и 10 единиц товара «х3», а товары «х1» и

«х4» совсем не выпускать. Отметим, что рассматриваемая программа в Office 2013 несколько беднее функциями, чем программа в Office 2003. При этом отчёты о решении практически одинаковы в обеих программах. Для примера на рис. 2.34 приведён отчёт об устойчиво- сти рассмотренной задачи.



Рис. 2.34. Отчёт об устойчивости

Сравнивая данные этого рисунка с данными рис. 2.27, отметим, что в содержательной части разница практически отсутствует.

## ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

**Задание 2.1.** Решить задачу линейного программирования гра- фическим способом:

*f* *x*  2*x*  3*x*  *max*

1

2

 2*x*1  *x*2  10

 2*x*  3*x*  6



 2*x*1



1 2

 4*x*2  8

*x*1  0*, x*2  0 .

**Задание 2.2.** Составить экономико-математическую модель за- дачи и решить ее графическим способом. Для производства двух ви- дов изделий А и В предприятие использует два вида сырья. Данные о количестве расхода сырья и его запасы приведены в таблице. Требу- ется составить такой план выпуска изделий А и В, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вид сырья | Норма расхода сырья  на одно изделие, кг | | Общее количество сырья |
| А | В |
| I | 12 | 4 | 300 |
| II | 4 | 4 | 120 |
| III | 3 | 12 | 252 |
| Прибыль от реализации одного изделия | 30 | 40 | – |

**Задание 2.3.** По данным таблицы составить такой план загрузки станков, чтобы затраты были минимальными. Решить задачу графи- ческим способом.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Тип аппарата | Производительность  работы линии, шт. | | План |
| I | II |
| А | 5 | 2 | 16 |
| В | 2 | 1 | 7 |
| С | 2 | 7 | 13 |
| Затраты денежных единиц за одну штуку | 1 | 5 | – |

**Задание 2.4.** Для производства столов и шкафов мебельная фаб- рика использует необходимые ресурсы. Норма затрат на одно изделие данного вида, цены изделий и общее количество имеющихся ресурсов приведены в таблице.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Ресурсы | Норма затрат ресурсов  на одно изделие | | Общее количество ресурсов |
| стол | шкаф |
| Древесина, м3 |  |  |  |
| первый вид | 0,2 | 0,1 | 40 |
| второй вид | 0,1 | 0,3 | 45 |
| Трудоемкость, человек. час | 1,2 | 1,5 | 360 |
| Цена одного изделия, тыс. руб. | 6 | 8 | – |

1. Считая, что сбыт готовой продукции обеспечен, определить, сколько столов и шкафов следует изготовить фабрике, чтобы доход от их реализации был максимальным.
2. Определить, увеличение запаса каких ресурсов наиболее вы- годно для фабрики и почему.

**Задание 2.5.** Для производства двух сортов мороженого (сли- вочного и молочного) комбинат использует сахар и сливки. Норма за- трат этих продуктов, суточный запас, а также цена реализации по ка- ждому виду мороженого приведены в таблице.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Ресурсы | Норма затрат ресурсов  на 1 кг мороженого | | Общий запас продуктов |
| молочное | сливочное |
| Сливки, кг | 0,2 | 0,1 | 160 |
| Сахар, кг | 0,2 | 0,4 | 240 |
| Трудоемкость, человек. час | 2 | 3 | 1800 |
| Цена 1 кг мороженого, руб. | 60 | 75 | – |

1. Считая, что сбыт мороженого обеспечен, определить, сколько сливочного и молочного мороженого должен выпускать в сутки ком- бинат, чтобы доход от реализации был максимальным.
2. Определить, увеличение запаса каких продуктов наиболее це- лесообразно и почему.

**Задание 2.6.** Для производства карамели двух видов А и В кон- дитерская фабрика использует сахар и фруктовое пюре. Норма затрат этих продуктов, а также затраты на 1 кг карамели, цена ее реализации и общий запас производственных ресурсов указаны в таблице.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Ресурсы | Норма затрат ресурсов на 1 кг изделия | | Общий запас  ресурсов |
| карамель А | карамель В |
| Сахар, кг | 0,2 | 0,6 | 180 |
| Фруктовое пюре, кг | 0,4 | 0,2 | 120 |
| Трудоемкость, человек. час | 0,4 | 0,5 | 180 |
| Цена 1 кг карамели, руб. | 45 | 60 | – |

Считая, что сбыт обеспечен, определить, сколько карамели А и В надо выпускать фабрике, чтобы доход от реализации был макси- мальным.

Определить, возможно ли снижение запасов каких-либо ресур- сов и на какую величину?

**Задание 2.7.** Швейная фабрика выпускает юбки и брюки, ис- пользуя при этом имеющееся оборудование, электроэнергию и ткань. Норма расхода ресурсов на одно изделие, запас этих ресурсов, а так- же цена готовой продукции приведены в таблице.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Ресурсы | Расход на одно изделие | | Суточный запас  ресурсов |
| юбка | брюки |
| Оборудование, человек. час | 2 | 3 | 600 |
| Электроэнергия, кВт\*ч | 4 | 2,5 | 1000 |
| Ткань, м | 1,5 | 2 | 900 |
| Цена одного готового изделия, тыс. руб. | 1 | 1,2 | – |

1. Зная, что суточный спрос на брюки не превышает 150 штук, определить план производства швейной фабрики, обеспечивающий максимальный доход.
2. Какой из используемых ресурсов является наиболее дефицит- ным и на сколько целесообразно увеличить его запас?
3. Возможно ли снижение суточного запаса ткани? Если да, то на какую величину?
4. Если цена одной юбки снизится до 0,9 тыс. руб., как это по- влияет на оптимальное решение?

**Задание 2.8.** Три станка обрабатывают 2 вида деталей – А и Б. Каждая деталь проходит обработку на всех трех станках. Известны время обработки детали на каждом станке, время работы станков в те- чение одного цикла производства и цена одной детали каждого вида.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Ресурсы | Время обработкиодной детали, ч | | Время работы  станка за один цикл производства, ч |
| А | В |
| I | 1 | 2 | 16 |
| II | 1 | 1 | 10 |
| III | 3 | 1 | 24 |
| Цена одной детали, тыс. руб. | 4 | 6 | – |

1. Определить план производства деталей А и В, обеспечиваю- щий максимальный доход цеху.
2. Является ли рабочее время второго станка дефицитным ре- сурсом? Если да, то на какую величину это время нужно увеличить?
3. Определить возможное снижение времени работы станков за один цикл производства.
4. Если цена детали *В* снизится до 5 тыс. руб., как это повлияет на решение?

**Задание 2.9.** Предприятие располагает ресурсами двух видов в количестве 120 и 80 кг соответственно. Эти ресурсы используются для выпуска продукции двух видов, причем расход на изготовление единицы продукции первого вида составляет 2 кг ресурса первого ви- да и 2 кг ресурса второго вида. Для производства единицы продукции второго вида требуется 3 кг ресурса первого вида и 1 кг ресурса вто- рого вида. Цена единицы продукции первого вида – 10 тыс. руб., вто- рого вида – 15 тыс. руб. Установлено, что спрос на продукцию перво- го вида никогда не превышает 22 штук в сутки.

1. Определить план производства продукции обоих видов, обес- печивающий наибольший доход предприятию.
2. Установить, какой из ресурсов наиболее дефицитен и почему.
3. Если спрос на изделие первого вида снизится до 15 штук в су- тки, как это повлияет на решение?
4. Если цена изделия второго вида снизится до 8 тыс. руб., как это повлияет на решение?

**Задание 2.10.** Цех выпускает изделия двух видов: валы и втул- ки. На производство одного вала рабочий тратит 3 ч, одной втулки – 2 ч. Валы предприятие реализует по цене 80 руб. за штуку, втулки – по цене 60 руб. Известно, что в сутки можно реализовать не более 200 валов и не более 300 втулок.

1. Определить суточную производственную программу цеха, обеспечивающую наибольший доход при условии, что фонд рабочего времени производственных рабочих составляет 900 человек. час.
2. Является ли фонд рабочего времени дефицитным ресурсом?
3. Если спрос на валы увеличится до 300 штук, как это повлияет на решение?
4. В каких пределах может меняться цена одной втулки, чтобы прежнее оптимальное решение сохранилось?

**Задание 2.11**. Хозяйство располагает следующими производст- венными ресурсами: площадь пашни составляет 600 га, количество человеко-дней труда – 4000. В таблице приведена информация о дан- ном хозяйстве.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ресурсы | Культура | |
| зерновые | кормовые |
| Затраты труда, человеко-день | 5 | 10 |
| Урожайность, ц/га | 28 | 36 |

1. Определить наиболее эффективное сочетание зерновых и кормовых культур при условии, что под кормовые культуры должно быть занято не более 300 га пашни.
2. Являются ли затраты труда дефицитным ресурсом и почему?
3. Если площадь пашни увеличится до 800 га, повлияет ли это на решение?
4. Как должна измениться урожайность зерновых культур, что- бы это повлияло на решение?

**Задание 2.12.** Фабрика по производству игрушек выпускает куклы и мишки. Для их производства используются поролон и ткань. Норма расхода этих материалов, суточный запас, а также цена гото- вой продукции приведены в таблице.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Исходные материалы | Норма расхода на готовое изделие | | Суточный запас материалов |
| кукла | мишка |
| Ткань, м | 1 | 1,5 | 900 |
| Поролон, кг | 2 | 1 | 800 |
| Ткань одного изделия, руб. | 200 | 300 | – |

Установлено, что суточный спрос на куклы не превышает 300 штук.

1. Определить план производства фабрики игрушек, обеспечи- вающий максимальный доход от реализации.
2. Если спрос на куклы возрастет до 350 штук в сутки, как изме- нится решение и почему?
3. Если суточный запас поролона увеличить до 900 кг, как изме- нится решение?
4. В каких пределах может колебаться цена одной куклы, чтобы оптимальный план производства остался прежним?

**Задание 2.13.** Решите задачу симплекс-методом:

*f* *x*  *x*  2*x*  *max*

1

2

 2*x*1  3*x*2  6



5*x*1  2*x*2  10.

 *x*2



 1,5

**Задание 2.14.** Решите задачу симплекс-методом:

*f* *x*  *x*  1*,*2*x*  *max*

1

2

 2*x*1  3*x*2  600



4*x*1  2*,*5*x*2  1000 .

 1*,*5*x*  2*x*  900

 1 2

**Задание 2.15.** На основе итоговой симплекс-таблицы ответить на вопросы.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базисные  переменные | Теневые цены | | | | | План B |
| x | y | S1 | S2 | S3 |
| x | 1 | 0 | 1/3 | 0 | 0 | 9 |
| S2 | 0 | 0 | 2/3 | 1 | –2 | 8 |
| y | 0 | 1 | -1/3 | 0 | 1 | 11 |
| Целевая функция Р | 0 | 0 | 1/3 | 0 | 1 | 29 |

1. Как изменится оптимальное решение задачи сверхнорматив- ного запаса ресурса 1 в количестве 1 кг?
2. Как изменится оптимальное решение задачи сверхнорматив- ного запаса ресурса 1 в количестве 2 кг?
3. Как изменится оптимальное решение задачи сверхнорматив- ного запаса ресурса 3 в количестве 5 кг?
4. Каково максимальное дополнительное количество ресурса 3, которое используется полностью и не приводит к созданию излишка ресурса?
5. Как изменится оптимальное решение задачи при уменьшении запаса ресурса 1 на 2 кг?

**Задание 2.16.** На основе симплекс-таблицы ответить на вопросы.

* 1. Как изменится производственный план, доход и остаток из- быточного ресурса, если запас первого ресурса увеличить на 2 кг?
  2. Что произойдет, если запас первого ресурса увеличить на 5 кг?
  3. Определите предельно допустимую величину, на которую можно увеличить запасы первого и второго ресурса, чтобы они не стали избыточным.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базисные переменные | Теневые цены | | | | | План В |
| x1 | x2 | S1 | S2 | S3 |
| x2 | 0 | 1 | 1 | –1 | 0 | 6 |
| х1 | 1 | 0 | –1 | 5 | 0 | 4 |
| S3 | 0 | 0 | 2 | –5 | 1 | 6 |
| Целевая ункция | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 52 |

**Задание 2.17.** Проведите анализ чувствительности итоговой симплекс-таблицы и ответьте на вопросы.

1. Чему равен оптимальный производственный план?
2. Чему будет равен доход при оптимальном производственном плане?
3. Какие ресурсы являются дефицитными?
4. Какой ресурс является избыточным? Каков остаток избыточ- ного ресурса?
5. Как изменится производственный план, доход и остаток из- быточного ресурса, если запас второго ресурса увеличится на 3 кг?
6. Какова предельно допустимая величина, на которую можно увеличить запасы второго и третьего ресурсов, чтобы они не стали избыточными.
7. На какую максимальную величину можно уменьшить запас второго ресурса, так, чтобы производственный план остался преж- ним?

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базисные  переменные | Теневые цены | | | | | План B |
| x1 | x2 | S1 | S2 | S3 |
| S1 | 0 | 0 | 1 | –11/3 | 8/9 | 84 |
| x1 | 1 | 0 | 0 | 1/3 | –1/9 | 12 |
| x2 | 0 | 1 | 0 | –1/12 | 1/9 | 18 |
| Целевая функция | 0 | 0 | 0 | 20/3 | 10/9 | 1080 |

# Глава 3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

# Двойственная задача

Рассмотрим основные понятия и выводы специального раздела линейного программирования – теории двойственности. В предыду- щей главе было показано, что любую задачу линейного программиро- вания можно записать следующим образом:

*f* *X*  *n c*

*j*

*j* 1

 *x j*

 max ,

(3.1)

*n*



*aij*  *xj*  *bj ; i*  1*,m,*

*j*1

(3.2)

*x*  0;

*j*

*j*  1, *n*.

(3.3)

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая *двойственной*. Связь исходной и двойственной задач заключается в том, что решение одной из них может быть получено непосредственно из решения другой.

Переменные двойственной задачи *yi* называют *объективно обу-*

*словленными оценками*, *или двойственными оценками* (*теневые це- ны*). Модель двойственной задачи имеет вид:

*g**Y*  *m b*  *y* 

min,

(3.4)

*i* *i*

*i*1

*m*

*aij*  *yi*  *cj* ;

*i*1

*j*  1, *n*,

(3.5)

*yi*  0; *i*  1, *m*.

(3.6)

Каждая из задач двойственной пары является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена незави- симо от другой. Однако при определении симплексным методом оп- тимального плана одной из задач находится решение и другой задачи.

Двойственная задача по отношению к исходной составляется по следующим правилам:

1. целевая функция исходной задачи (3.1)–(3.3) формулируется на максимум, а двойственной (3.4)–(3.6) – на минимум. При этом в исходной задаче все неравенства имеют вид « **≤** », а в задаче на мини- мум – «**≥** »;
2. матрица *А* в системе исходной задачи и аналогичная матрица *АТ* в двойственной задаче получаются друг из друга транспонирова- нием;
3. число переменных в двойственной задаче равно числу огра- ничений (3.2) исходной задачи, а число ограничений (3.5) двойствен- ной задачи – числу переменных в исходной задаче;
4. коэффициентами при неизвестных целевой функции двойст- венной задачи (3.4) являются свободные члены в системе ограниче- ний (3.2) исходной задачи, а правыми частями в ограничениях (3.5) двойственной задачи – коэффициенты при неизвестных в целевой функции (3.1) исходной задачи;
5. каждому ограничению одной задачи соответствует перемен- ная другой задачи: номер переменной совпадает с номером ограниче- ния; при этом ограничению, записанному в виде неравенства «**≤** », соответствует переменная, связанная условием неотрицательности. Если функциональное ограничение исходной задачи является равен- ством, то соответствующая переменная двойственной задачи может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

*Первая теорема двойственности.*

Для взаимодвойственных ЗЛП имеет место один из взаимоис- ключающих случаев:

1. В прямой и двойственной задачах имеются оптимальные ре-

шения, при этом значения целевых функций на оптимальных решени- ях совпадают:

max *f* *X*  min *g**Y* .

1. В прямой задаче допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена сверху. При этом у двой- ственной задачи будет пустое допустимое множество.
2. В двойственной задаче допустимое множество не пусто, а це- левая функция на этом множестве не ограничена снизу. При этом у прямой задачи допустимое множество оказывается пустым.
3. Обе из рассматриваемых задач имеют пустые допустимые множества.

*Вторая теорема двойственности* (теорема о дополняющей не- жесткости).

1

2

Пусть

*X*  *x* , *x*

, ..., *xn* 

– решение прямой задачи, а

*Y*  *y* , *y*

1

2

, ..., *ym*

 – допустимое решение двойственной задачи. Для того

чтобы они были оптимальными решениями, необходимо и достаточ- но, чтобы выполнялись следующие соотношения:

*y n a*  *b*   0; *i*  1, *m* , (3.7)



*i*  *ij i* 

 *j*1 

*x*  *m j*  *i*1



*aij yi*

 *c*   0;

*j* 

*j*  1, *n*.

(3.8)

Эти условия позволяют, зная оптимальное решение одной из взаимодействующих задач, найти оптимальное решение другой задачи.

*Теорема об оценках*. Значения переменных *yi* в оптимальном

решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния

свободных членов *bi* системы ограничений – неравенств прямой зада-

чи на величину

*f* *X* :

 *f* *X*   *b y*

(3.9)

*i i*

Решая ЗЛП симплексным методом, мы одновременно решаем двойственную задачу ЗЛП. Значения переменных двойственной зада-

чи *yi* в оптимальном плане называют объективно обусловленными

или двойственными оценками.

Рассмотрим экономическую интерпретацию двойственной зада- чи на следующем примере (задача оптимального использования ре- сурсов).

**Пример 3.1.**

Пусть для выпуска четырех видов продукции Р1, Р2, Р3, Р4 на предприятии используют три вида сырья S1, S2 и S3. Объемы выде- ленного сырья, нормы расхода сырья и прибыль на единицу продук- ции при изготовлении каждого вида продукции приведены в таблице. Требуется определить план выпуска продукции, обеспечивающий

наибольшую прибыль. В качестве неизвестных примем объем выпус-

ка продукции j-го вида *x*  *j*  1,2,3,4.

*j*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вид  сырья | Запасы  сырья | Вид продукции | | | |
| *Р1* | *Р2* | *Р3* | *Р4* |
| *S1* | 35 | 4 | 2 | 2 | 3 |
| *S2* | 30 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| *S3* | 40 | 3 | 1 | 2 | 1 |
| Прибыль | | 14 | 10 | 14 | 11 |

Модель задачи:

*f* *X*  14*x*

1

10*x*2

14*x*3

11*x*4

 max ,

4*x*1  2*x*2  2*x*3  3*x*4

*x*1  *x*2  2*x*3  3*x*4

 35, (1)

 30 , (2)

3*x*1  *x*2  2*x*3  *x*4  40 , (3)

*xj*  0,

*j*  1,2,3,4.

Теперь сформулируем двойственную задачу. Пусть некая орга- низация решила закупить все ресурсы рассматриваемого предпри- ятия. При этом надо установить оптимальную цену на приобретаемые

ресурсы

*у*1 , *у*2 , *у*3

исходя из следующих объективных условий:

1. покупающая организация стремится минимизировать общую стоимость ресурсов;
2. за каждый ресурс надо уплатить не менее той стоимости, ко- торую хозяйство может получить при переработке сырья в готовую продукцию.

В результате получим:

*g**Y*  35*y*  30*y*  40*y*  min ,

1

2 3

4 *y*1  *y*2  3*y*3  14, (4)

2 *y*1  *y*2  *y*3  10 , (5)

2 *y*1  2 *y*2  2 *y*3  14 , (6)

3*y*1  3*y*2  *y*3  11, (7)

*y*1  0, *y*2  0, *y*3  0.

В результате решения данной задачи в Excel получен оптималь- ный план:

*X*  0;5;12,5;0,

*f*max  225,

*Y*  3;4;0,

*g*min  225.

Найдем решение двойственной задачи без использования Ехcеl.

Подставим в (1), (2) и (3) значения компонент вектора

*X*  0;5;12,5;0:

2*x*2  2*x*3  35  10  25  35, (8)

*x*2  2*x*3  30  5  25  30 , (9)

*x*2  2*x*3  40  5  25  30  40 . (10)

Согласно уравнению (10): 5 + 25 < 40, т. е. 𝑎32 + 𝑎33 < 𝑏3. Но согласно уравнению (3.7):

*n*

*если*

*;*

 *aij*  *bi ,*

*j* 1

*то yi*  0*,*

*i*  1*,m* .

Следовательно,

*y*3  0 . Перепишем (4)–(7):

4 *y*1  *y*2  14, (11)

2 *y*1  *y*2  10, (12)

2 *y*1  2 *y*2

3*y*1  3*y*2

 14, (13)

 11. (14)

Получили два неизвестных и четыре условия. Система имеет

бесконечное множество решений. Но учтём, что

*x*1  0 и

*x*4  0 . Кроме

того, согласно уравнению (3.8) должно выполняться условие:

*m*

*если*

*;*

 *aij yi*  *c j ,*

*j*1

*то xj*  0*, j*  1*,n* .

Таким образом, уравнения (13) и (14) действительно неравенст- ва. Но согласно уравнению (3.8) выполняется условие:

*m*

*если xi*  0,

;

*то* *aij y j i*1

 *cj* ,

*j*  1, *n* .

Следовательно, уравнения (12) и (13) представляют собой ра- венства:

2 *y*1  *y*2  10,

2 *y*1  2 *y*2  14 .

Отсюда находим, что совпадает с Excel.

*y*1  3 ,

*y*2  4 , т. е. вектор

*Y*  3; 4; 0, что

Итак, ресурс *S*3 , согласно уравнению (10), не используется пол-

ностью. Он не дефицитен. Ресурсы

*S*1 и *S*2

используются полностью в

данном плане производства. Они дефицитны. Далее

*x*1  0 и

*x*4  0 ,

т.е.

*x*1 и *x*2

не вошли в план, следовательно, продукция

*P*1 и *P*4

убы-

точна. Продукция *P*2

план.

и *P*3

не убыточна, она вошла в оптимальный

Экономический смысл первой теоремы двойственности сле- дующий. План производства *X* и набор оценок ресурсов *Y* оказыва- ются оптимальными тогда и только тогда, когда прибыль от реализа- ции продукции, определенная при известных заранее ценах продук-

ции *c*1 ,*c*2 , ..., *cn* , равна затратам на ресурсы по «внутренним, теневым»

(определяемым только из решения задачи) ценам ресурсов *y*1, *y*2 , ..., *ym* .

Для всех же других планов *X* и *Y* обеих задач прибыль от реализа- ции продукции всегда меньше (или равна) стоимости затраченных ре-

сурсов: *f* *X*  *g**Y*  , т.е. ценность всей выпущенной продукции не

превосходит суммарной оценки имеющихся ресурсов. Значит, вели-

чина *g**Y*  *f* *X*  характеризует производственные потери в зависимо-

сти от рассматриваемой производственной программы и выбранных оценок ресурсов.

При оптимальной производственной программе и векторе оце- нок ресурсов производственные потери равны нулю.

Экономический смысл первой теоремы двойственности можно интерпретировать и так: предприятию безразлично, производить ли *продукцию* по оптимальному плану *X* и получить максимальную прибыль либо продать ресурсы по оптимальным ценам *Y* и возмес- тить от продажи равные ей максимальные затраты на ресурсы.

Из второй теоремы двойственности (уравнения (3.7), (3.8)) в

данном случае следуют следующие требования на оптимальную про-

1

2

изводственную программу

*X*  *x* , *x*

, .., *xn* 

и оптимальный вектор

оценок *Y*

 *y* , *y*

, ..., *ym* .

Из уравнения (3.7) вытекает:

1

2

*n*

*если y*  0*, то*

*i*

*n*

 *aij*  *bi , i*  1*,m;*

*j* 1

(3.10)

*;*

*если*  *aij x j*  *bi ,*

*j*1

*то yi*  0*, i*  1*,m* .

А из уравнения (3.8):

*если xi*  0, *то*

*m*

*m*

*aij y j*  *cj* ,

*i*1

*j*  1, *n*;

(3.11)

;

*если* *aij yi*  *cj* ,

*j*1

*то xj*  0,

*j*  1, *n* .

Условие (3.10) можно интерпретировать так: если оценка *yi*

единицы ресурса *i* -го вида положительна, то при оптимальной произ- водственной программе этот ресурс используется полностью; если же ресурс используется не полностью, то его оценка равна нулю.

Из условия (3.11) следует, что если *j* -й вид продукции вошел в оптимальный план, то он в оптимальных оценках не убыточен; если же *j* -й вид продукции убыточен, то он не войдет в план, не будет вы- пускаться.

Кроме того, если даны плановые задания по выпуску продукции

– прямые ограничения – то условие (3.10) для этих ограничений запи- сывается в виде:

*если если*

x j  *Tj* ,

*ym* *j*  0,

*то ym* *j*  0 ,

*то* x j  *Tj* ,

(3.12)

где *Tj*

– плановое задание по выпуску продукции *j* -го вида.

Кроме нахождения оптимального решения должно быть обеспе-

чено получение дополнительной информации о возможных измене- ниях решения при изменении параметров системы.

*Эту часть исследований обычно называют анализом модели на чувствительность.*

Экономико-математический анализ решений осуществляется в двух направлениях:

1. в виде вариантных расчетов по моделям с составлением раз- личных вариантов плана;
2. в виде анализа каждого из полученных решений с помощью двойственных оценок.

Одно из эффективных средств экономико-математического ана- лиза – использование объективно обусловленных оценок оптимально-

го плана. Такого рода анализ базируется на свойствах двойственных оценок.

Перейдем к рассмотрению конкретных экономических свойств

оценок *yi* оптимального плана. Сначала перечислим эти свойства, а

потом проиллюстрируем их конкретными примерами.

*Свойство 1.* Оценки как мера дефицитности ресурсов и продук-

ции.

*Свойство 2.* Оценки как мера влияния ограничений на функ-

ционал.

*Свойство 3*. Оценки как инструмент определения эффективно- сти отдельных вариантов.

*Свойство 4*. Оценки как инструмент балансирования суммарных затрат и результатов.

**Пример 3.2.** Задача о планировании выпуска тканей.

Пусть некоторая фабрика выпускает три вида тканей, причем суточное плановое задание составляет не менее 90 м тканей первого вида, 70 м – второго и 60 м – третьего. Суточные ресурсы следующие: 780 единиц производственного оборудования, 850 единиц сырья и 790 единиц электроэнергии, расход которых на один метр ткани пред- ставлен в таблице.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Ресурсы | Ткани | | |
| I | II | III |
| Оборудование | 2 | 3 | 4 |
| Сырье | 1 | 4 | 5 |
| Электроэнергия | 3 | 4 | 2 |

Цена за один метр ткани вида I равна 80 денежным единицам, II – 70 денежным единицам, III – 60 денежным единицам.

Необходимо определить, сколько метров ткани каждого вида следует выпустить, чтобы общая стоимость выпускаемой продукции была максимальной.

Введем обозначения:

*x*1 – количество метров ткани вида I;

*x*2 – количество метров ткани вида II;

*x*3 – количество метров ткани вида III.

*f* *X*  80*x*  70*x*  60*x*  max

1

2 3

1

2

3

(1)

(2)

1 2 3

(3)

2*x*1  3*x*2  4*x*3  780 *x*  4*x*  5*x*  850  3*x*1  4*x*2  2*x*3  790

ограничения по ресурсам,



(4)



0  *x*1  90

(5)

(6)

0  *x*2

0  *x*3

 70

 60





плановое задание.

В результате решения задачи симплексным методом получен

4

5

6

следующий оптимальный план:

*f*max

*X*  19075,

*X*  112,5; 70; 86,25.

Решение в Excel также дает: Двойственная задача.

*f*max

*X*  19075,

*X*  112,5; 70; 86,25.

Сама модель двойственной задачи имеет вид:

*g**Y*  780*y*  850*y*  790*y*  90 *y*  70 *y*  60 *y*

1

2 3 4 5 6

 *min* .

Для правильной записи ограничений двойственной задачи урав- нения (1)–(6) перепишем в виде











1

2

3

4

5

6

*y*1 

2*x*1  3*x*2  4*x*3  780 ,

(1)

*y*  *x*1

2

*y*  3*x*1

3

* 4*x*
* 4*x*

2

2

* 5*x*
* 2*x*

3

3

 850 ,

 790 ,

(2)

(3)

*y*4 

*x*1  0  *x*2  0  *x*3  90 ,

(4)

*y*  0  *x*  *x*

1

2

5

* 0  *x*

 70 ,

(5)

*y*  0  *x*

3

1

6

* 0  *x*  *x*

 60 ,

(6)

где

3

2

*y*1 – двойственная оценка ресурса «оборудование»;

*y*2 – двойст-

венная оценка ресурса «сырье»; *y*3 – двойственная оценка

ресурса «электроэнергия»; *y*4 – двойственная оценка ткани

вида I;

*y*5 – двойственная оценка ткани вида II;

*y*6 – двойст-

венная оценка ткани вида III.

Теперь уже спокойно можно записать ограничения для двойст- венной задачи:

2 *y*1  *y*2  3*y*3  *y*4  80 ,

3*y*1  4 *y*2  4 *y*3  *y*5  70 ,

(7)

(8)

4 *y*1  5*y*2  2 *y*3  *y*6  60,

(9)

*y*1, 2,3  0, *y*4,5,6  0 .

С помощью Excel можно получить следующий результат:

*Y*  2,5; 0; 25; 0;37,5; 0,

*g*min

*Y*  19075.

Но можно получить эти значения и без Excel.

Действительно, подставим найденный вектор

в систему ограничений (1)–(6):

*X*  112,5; 70; 86,25

2*x*1  3*x*2  4*x*3  780  225  210  345  780, (10)

*x*1  4*x*2  5*x*3  850 112,5  280  431,25  823,75  850, (11)

3*x*1  4*x*2  2*x*3  790  337,5  280 172,5  790, (12)

*x*1  90 

*x*2  70 

112,5  90 , (13)

70  70 , (14)

*x*3  60  86,25  60 . (15)

Сопоставляя уравнение (11) и второе уравнение (3.10), прихо-

дим к выводу, что

*y*2  0 . Сопоставляя уравнения (13) и (15) с первым

уравнением (3.12), приходим к выводу, что

*y*4  0 и

*y*6  0. Поскольку

в первом уравнении

*j*  1, отсюда

*jm*1 

*j*31  *y*4 . Далее, если

*j*  3, то

*jm*3 

*j*33  *y*6 . Остается найти

*y*1 ,

*y*3 и

*y*5 .

Согласно первому уравнению (3.11), все неравенства системы ограничений (7)–(9) превращаются в систему равенств, для нахожде-

ния

*y*1 ,

*y*3 и

*y*5 :

2 *y*1  3*y*3  80

, (16)

3*y*1  4 *y*3  *y*5  70 , (17)

4 *y*1  2 *y*3  60. (18)

Решая ее, находим: *y*1  2,5, *y*3  25 и *y*5  37,5 . То есть вектор

равен *Y*  2,5; 0; 25; 0;37,5; 0, что совпадает с Excel.

Одновременно выясняем, что согласно ограничению (11) ресурс

«сырье» используется не полностью, имеется остаток – 26,25 . То есть

этот ресурс не является дефицитным, и можно попытаться увеличить прибыль за счет этого ресурса. Согласно уравнениям (10) и (12), ресурсы «оборудование» и «электроэнергия» используются полно-

стью и являются дефицитными. Именно они ограничивают целевую функцию.

Согласно уравнению (14), план по ткани типа II выполняется. Согласно уравнениям (13) и (15), план по тканям типа I и III – пере-

выполняется.

Мы видим также, что

*f*max

*X*  *g*

min

*Y* , следовательно, план вы-

пуска тканей и соответствующая ему система оценок ресурсов и про- дукции оптимальны.

Итак, получили:

*y*1  2,5

* двойственная оценка ресурса «оборудование»;

*y*2  0

* двойственная оценка ресурса «сырье»;

*y*3  25 – двойственная оценка ресурса «электроэнергия»;

*y*4  0

* двойственная оценка ткани вида I;

*y*5  37,5 – двойственная оценка ткани вида II;

*y*6  0

* двойственная оценка ткани вида III.

Приведем экономическое истолкование этих оценок, которое представляет собой интерпретацию их общих экономико-математи- ческих свойств, применительно к конкретному содержанию задачи.

По условию второго уравнения (3.10) не использованный пол- ностью в оптимальном плане ресурс получает нулевую оценку. Нуле- вая оценка ресурса свидетельствует о его недефицитности. Ресурс не- дефицитен не из-за его неограниченных запасов (они ограничены ве-

личиной *bi* ), а из-за невозможности его полного использования в оп-

тимальном плане.

Поскольку суммарный расход недефицитного ресурса меньше его общего количества, то план производства им не лимитируется.

Данный ресурс не препятствует и дальше максимизировать целевую

функцию *f* *X* .

Ограничивают целевую функцию дефицитные ресурсы, в дан- ной задаче – оборудование и электроэнергия. Они полностью исполь- зованы в оптимальном плане. По условию первого уравнения (3.10)

оценка таких ресурсов положительна ( *y*1  2,5, но, ограничение по оборудованию имеет вид:

2*x*1  3*x*2  4*x*3  780 .

*y*3  25). Действитель-

Подставив найденные значения

*X*  112,5; 70; 86,25, получим:

2 112,5  3  70  4  86,25  780  780 ,

т. е. ресурс расходуется полностью и его оценка положительна

*y*1  2,5.

Ограничение по сырью имеет вид

*x*1  4*x*2  5*x*3  850 .

Подставив найденные значения

*X*  112,5; 70; 86,25, получим:

112,5  4  70  5  86,25  823,75  850 ,

т. е. ресурс расходуется неполностью и его оценка нулевая: Ограничение по электроэнергии имеет вид:

3*x*1  4*x*2  2*x*3  790 .

*y*2  0 .

Подставив найденные значения

*X*  112,5; 70; 86,25, получим:

3 112,5  4  70  2  86,25  790  790 ,

т.е. ресурс расходуется полностью и его оценка положительна

*y*3  25.

Рассмотрим теперь понятие дефицитности продукции. Напом-

ним, что продукцию оценивают параметры

*y*3 ,

*y*4 и

*y*5 . Их система

неравенств имеет вид (7)–(9). Или, подставив значения вектора

*Y*  2,5; 0; 25; 0;37,5; 0, найдем:

2 *y*1  3*y*3  80  5  75  80 , (19)

3*y*1  4 *y*3  *y*5  70  7,5 100  37,5  70, (20)

4 *y*1  2 *y*3  60  10  50  60 . (21)

По условию первого уравнения (3.12) нулевую оценку ( *y*4  0 ,

*y*6  0 ) получает продукция, задания по выпуску которой в оптималь-

ном плане перевыполняются (если

*x j*  *T* , то

*ym* *j*

 0 ; если

*ym* *j*  0 ,

то *x j*  *T* ).

Очевидно, перевыполнение плана целесообразно по выгодной продукции (ткани I и III видов), т.е. такой, производство которой спо- собствует достижению максимума критерия оптимальности. Размеры производства такой выгодной продукции определяются не величиной задания на выпуск (*Tj* ) (в оптимальном плане они перекрыты), а огра-

ниченностью дефицитных ресурсов. Эту продукцию выпускают как можно больше, пока хватит ресурсов.

Выпуск выгодной продукции ограничивается не только фактом ограниченности дефицитных ресурсов, но и тем, что часть дефицит- ных ресурсов требуется выделить на обеспечение выпуска невыгод- ной продукции в соответствии с плановыми заданиями. По условию второго уравнения (3.12) отрицательную оценку ( *y*5  37,5) получает продукция, задания по выпуску которой не перевыполняются. И так

как по условию задачи ( *x j*  *Tj* ) плановые задания должны быть обя-

зательно выполнены, то продукция делится на выгодную (виды I и III ткани) и невыгодную (вид II ткани).

Если в ограничение двойственной задачи, относящееся к II виду ткани:

3*y*1  4 *y*2  4 *y*3  *y*5  70,

подставить полученные значения двойственных оценок, то получаем

3  2,5  4  0  4  25  37,5  70 ,

107,5  37,5  70 ,

т.е. стоимость ресурсов, затраченных на один метр ткани вида II, со-

ставляет

107,5

денежной единицы и это на

37,5

денежной единицы

больше цены одного метра ткани этого вида. Ведь

 37,5

* это

*y*5 , а

это – оценка ткани вида II. Таким образом, вид ткани II убыточен для фабрики: на каждом выпущенном метре ткани этого вида фабрика те-

ряет

37,5

денежной единицы.

В соответствии с критерием оптимальности плана, в зависимо- сти от того, перевыполняется план выпуска или нет, выпуск ткани ви- да II поглощает часть дефицитных ресурсов, чем сдерживает рост вы- пуска выгодной продукции, а тем самым и рост целевой функции.

Оценка ресурса показывает, насколько изменится критерий оп- тимальности при изменении количества данного ресурса на единицу. Для недефицитного ресурса оценка равна нулю, поэтому изменение его величины не повлияет на критерий оптимальности. Дефицитность ресурса измеряется вкладом единицы ресурса в изменение целевой функции.

Влияние ограничений по выпуску продукции на критерий опти- мальности противоположно влиянию ограничений по ресурсам. Если

продукция невыгодна (вид II ткани,

*y*5  37,5), то увеличение плано-

вых заданий по ее выпуску ведет к уменьшению выпуска выгодной продукции и ухудшает план. Наоборот, уменьшение плановых зада- ний по невыгодной продукции позволяет снизить ее выпуск, перебро- сить сэкономленные ресурсы на дополнительный сверхплановый вы- пуск выгодных видов продукции, что увеличивает значение целевой функции. Изменение плановых заданий по выгодной продукции не изменяет значение целевой функции.

Перейдем к анализу модели на чувствительность.

**Пример 3.3.**

На основании информации, приведенной в таблице, составить план производства, максимизирующий объем прибыли.

Таблица А

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Ресурсы | Затраты ресурсов  на единицу продукции | | Наличие ресурсов |
| А | Б |
| Труд | 2 | 4 | 2000 |
| Сырье | 4 | 1 | 1400 |
| Оборудование | 2 | 1 | 800 |
| Прибыль на единицу продукции | 40 | 60 |  |

Экономико-математическая модель будет иметь вид:

*f* *X*  40*x*  60*x*  max,

1

2

2*x*1  4*x*2  2000, (1)

4*x*1  *x*2  1400, (2)

2*x*1  *x*2  800, (3)

*x*1, 2  0 .

С помощью Excel можно получить следующий результат:

*X*  200; 400,

*f*max  32000.

Двойственная задача имеет вид:

*g**Y*  2000*y*  1400*y*

1

2

 800*y*3

 min ,

2 *y*1  4 *y*2  2 *y*3  40, (4)

4 *y*1  *y*2  *y*3  60 , (5)

*y*1, 2,3  0 , (6)

где

*y*1 – оценка ресурса «труд»;

*y*2 – оценка ресурса «сырье»;

*y*3 –

оценка ресурса «оборудование».

С помощью Excel можно получить следующий результат:

*Y*  13,3(3); 0; 6,6(6), *g*

 32000, *Y*   40 ; 0; 20  .

min  

3

3

 

Выявим чувствительность оптимального плана к определенным изменениям исходной модели.

1. Увеличение объемов какого вида ресурсов наиболее выгодно?
2. На сколько можно увеличить запас сырья для улучшения по- лученного оптимального значения целевой функции?
3. Каков диапазон изменения того или иного коэффициента це- левой функции, при котором не происходит изменения оптимального решения?
4. Целесообразность включения в план новых изделий.
5. *Ценность ресурсов.*

В примере объективно обусловленные оценки ресурса «труд»

равны 40/3 ( *y*1

 40 ); «сырье» – 0 ( *y*

3 2

 0 ); «оборудование» – 20/3

( *y*3

 20 ). Дефицитный ресурс, полностью используемый при опти-

3

мальном плане (для которого

*aij xj*

 *bi* ), имеет положительную оцен-

ку ( *yi*  0). В примере «сырье» не является дефицитным ресурсом. Действительно, перепишем ограничение по сырью – уравнение (2):

4*x*1  *x*2  1400;  4  200  400  1200  1400  *b*2 , (7)

*y*2  0 .

«Труд» и «оборудование» – дефицитные ресурсы:

2*x*1  4*x*2  2000;  2  200  4  400  2000  *b*1 , (8)

*y*  40 ,

1 3

2*x*1  *x*2  800;  2  200  400  800  *b*3 , (9)

*y*  20 .

3 3

Чем выше величина оценки ресурса.

*yi* , тем острее дефицитность *i* -го

В примере «труд» ( *y*1

 40 ) более дефицитен, чем «оборудова-

3

ние» 3 ( *y*3

труда.

 20 ). Поэтому наиболее выгодно увеличение ресурсов

3

Необходимо иметь в виду, что ценность различных видов сырья нельзя отождествлять с действительными ценами, по которым осуще- ствляется его закупка. В данном случае речь идет о некоторой мере, имеющей экономическую природу, которая характеризует ценность сырья только относительно полученного оптимального решения.

1. *Чувствительность решения к изменению запасов сырья.*

Предположим, что запас сырья ресурсов «труд» изменился на 12

единиц, т. е. теперь он составляет

2000 12  2012

единиц. Из теоремы

об оценках, согласно которой значения переменных *yi* в оптимальном

решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния

свободных членов *bi* системы ограничений – неравенств прямой зада-

чи на величину *f* *X*  (3.9), известно, что колебание величины *b* при-

*i*

водит к увеличению или уменьшению *f* *X* . Оно определяется вели-

чиной

*yi* в случае, когда при изменении величин *bi*

значения пере-

менных *yi* в оптимальном плане соответствующей двойственной за-

дачи остаются неизменными. Поэтому необходимо найти такие ин- тервалы изменения каждого из свободных членов системы ограниче- ний исходной ЗЛП, в которых оптимальный план двойственной зада- чи не менялся бы.

Определим интервалы устойчивости двойственных оценок в примере 3.3. Матрица *A* имеет вид (уравнения (1) – (3)):

 2



*A*   4



2



4



1  .



1



После приведения задачи к канонической форме, матрица *A*

примет следующий вид:

 2



*A*   4



2



4 1 0

1 0 1

1 0 0

0



0.



1



С ненулевыми значениями в оптимальный план вошли *x*\*  200,

1

*x*\*  400 и

2

*x*\*  200, следовательно, матрица

*A*\* будет составлена из

первого, второго и четвертого столбцов матрицы *A* :

4

 2



*A*   4



2



4 0



1 1 .



1 

0

Для вычисления интервалов устойчивости необходимо найти

матрицу

*D*  *A*\*1 :

1/ 6 0



2 / 3 



 0,166 0



0,333 



*D*   1/ 3

0 1/ 3    0,333

0  0,333 .

 1/ 3









1  7 / 3  0,333

1  2,333

При вычислении интервалов устойчивости примем

*x*\*  200  *x*

*k* 1 ,

*x*\*  400  *x* и *x*\*  200  *x*

1

. Интервалы устойчивости первого ресур-

2 *k* 2 4

са «труд»:

*k* 3

*b(*  *)*  *min**x / d : x / d* 

1

2

21 3 31

 *min*400*/* 0*,*3333*:* 200*/* 0*,*333 *min*1200*;*600 600,

*b(*  *)* 

1

*x*1 */ d*11

 200 */*  0*,*16667  1200 .

Но эти оценки сразу же выдает Excel в листе «отчет по устойчи- вости». В частности, по этой задаче в отчете по устойчивости имеют- ся следующие значения (таблица Б).

Таблица Б

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ячейка | Имя | Результ. значение | Нормир. стоимость | Целевой коэффициент | Допустимое увеличение | Допустимое уменьшение |
| $A$2 | *x*1 | 200 | 0 | 40 | 80 | 10 |
| $B$2 | *x*2 | 400 | 0 | 60 | 20 | 40 |

В отчёте по результатам имеем следующие значения (таблица В).

Таблица В

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ячейка | Имя | Результ. значение | Теневая цена | Ограничение. Правая часть | Допустимое увеличение | Допустимое уменьшение |
| $C$4 | Труд | 2000 | 40/3 | 2000 | 1200 | 600 |
| $C$5 | Сырье | 1200 | 0 | 1400 | 1E+30 | 200 |
| $C$6 | Оборуд. | 800 | 20/3 | 800 | 85,7 | 300 |

Значение допустимого увеличения ячейки $C$5 равно ∞, потому что этот ресурс в оптимальном плане используется не полностью и поэтому не имеет верхней границы интервалов устойчивости.

В нашем примере определим величину изменения объема при- были от реализации продукции при увеличении ресурса «труд» на

12 единиц. Эти изменения находятся в интервалах устойчивости двойственных оценок, поэтому можно воспользоваться теоремой об оценках:

*f* *X*  12  40  160 .

3

1. *Чувствительность решения к изменению коэффициентов це- левой функции* представлена в таблице В в столбцах «Допустимое увеличение» и «Допустимое уменьшение».
2. *Целесообразность включения в план новых изделий.*

Пусть нашему предприятию были предложены на выбор три но- вых изделия (В, Г, Д), за счет которых можно было бы расширить но- менклатуру выпускаемой продукции при тех же запасах ресурсов. Нормы затрат ресурсов и прибыль от реализации единицы продукции для этих изделий приведены в таблице Г. Определим из предложен- ных видов изделий выгодные для предприятия с экономической точки зрения.

Таблица Г

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Ресурсы | Объективно обусловленные оценки ресурсов | Затраты ресурсов  на одно изделие | | |
| В | Г | Д |
| Труд | 40/3 | 6 | 4 | 2 |
| Сырье | 0 | 2 | 1 | 3 |
| Оборудование | 20/3 | 3 | 1 | 2 |
| Прибыль на одно изделие |  | 80 | 70 | 45 |

Эту задачу можно решить на основании свойства 3 двойствен- ных оценок: в оптимальный план задачи на получение максимума прибыли может быть включен лишь тот вариант, для которого при- быль, недополученная из-за отвлечения дефицитных ресурсов, т.е. ве-

*m*

личина  *aij yi* , покрывается полученной прибылью

***j***

*i*1

***c*** . Таким обра-

зом, характеристикой того или иного варианта служит разность

*m*

 *j*  *aij yi*  *c j*

*i*1

При этом если

 *j*  0 , то вариант выгоден; если

 *j*  0 , то невыгоден.

Рассчитаем характеристики новых изделий. Для изделия В:

*B*  6  40/ 3  0  2  20/ 3 3  80  100  80  20  0 .

Изделие В невыгодно для включения в план, так как затраты на его изготовление не покрываются получаемой прибылью.

Рассчитаем целесообразность включения изделия Г в план но- вых изделий:

 *Г*  4  40 */* 3 1 0 1 20 */* 3  70  60  70  10.

Таким образом, изделие *Г* целесообразно включать в план новых изделий.

Рассчитаем целесообразность включения изделия *Д* в план но- вых изделий:

 *Д*  2  40 / 3  3 0  2  20/ 3  45  40  45  5 .

Таким образом, изделие *Д* целесообразно включать в план но- вых изделий.

# Транспортная задача

В *m* пунктах отправления *A*1 *, A*2 *..., Am ,* которые в дальнейшем бу-

дем называть поставщиками (базами), сосредоточено определенное количество единиц некоторого однородного продукта, которое обо-

значим как *ai i*  1*,* 2*, ..., m* *.* Данный продукт потребляется в *n* пунк-

тах *B*1 *, B*2 *..., Bn* , которые будем называть потребителями (магазинами).

Объем потребления обозначим *bj*

*j*  1*,* 2*, ..., n**.* Известны расходы на

перевозку единицы продукта из пункта

*Ai* в пункт

*Bj ,* которые равны

*c* и приведены в матрице транспортных расходов *C*  *c* *.*

*ij ij*

Требуется составить такой план прикрепления потребителей к

поставщикам, т.е. план перевозок, при котором весь продукт вывозит-

ся из пунктов

*Ai* в пункты *Bj*

в соответствии с потребностью и общая

величина транспортных издержек будет минимальной.

Обозначим количество продукта, перевозимого из пункта

*Ai* в

пункт

*Bj ,* через

*xij*

*.* Совокупность всех переменных

*xij*

для краткости

обозначим *X ,* тогда целевая функция задачи будет иметь вид

а ограничения:

*f* *X*  *m*

*i*1

*n*



*j* 1

*cij*

*xij*

 *min* , (3.13)

*m*

 *xij*

*i*1

*n*

 *bj*

*j*  1*,n* , (3.14)

 *xij*  *ai*

*j*1

*i*  1*,m* . (3.15)

Условия (3.14) означают полное удовлетворение спроса во всех пунктах потребления; условия (3.15) определяют полный вывоз про- дукции от всех поставщиков.

Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (3.13) — (3.15) является *условие баланса:*

*m*

 *ai*

*i* 1

*n*

 *bj* . (3.16)

*j* 1

Транспортная задача, в которой имеет место равенство (3.16), на- зывается *закрытой* и может быть решена как задача линейного про- граммирования с помощью симплексного метода. Однако благодаря особенностям переменных задачи и системы ограничений разработаны специальные, менее громоздкие методы ее решения. Наиболее приме- няемым методом является *метод потенциалов,* при котором каждому

*i*  *му*

поставщику устанавливается потенциал

*ui ,* который можно ин-

терпретировать как цену продукта в пункте поставщика. A каждому

*j*  *му*

потребителю устанавливается потенциал *vj*

*,* который можно

принять условно за цену продукта в пункте потребителя. В простей- шем случае цена продукта в пункте потребителя равна его цене в пунк- те поставщика плюс транспортные расходы на его доставку, т.е.

*vj*  *ui*  *cij* . (3.17)

Первым этапом алгоритма метода потенциалов для закрытой транспортной задачи решения является составление начального рас- пределения (начального плана перевозок). Для реализации этого на- чального этапа имеется, в свою очередь, ряд методов: северо- западного угла, наименьших стоимостей, аппроксимаций Фогеля и др. Вторым этапом служит построение системы потенциалов на ос-

нове равенства (3.17) и проверка начального плана на оптимальность; в случае его неоптимальности переходят к третьему этапу, содержа- ние которого заключается в реализации так называемых циклов пере- распределения (корректировка плана прикрепления потребителей к поставщикам), после чего переходят опять ко второму этапу. Сово- купность процедур третьего и второго этапов образует одну итера- цию; эти итерации повторяются, пока план перевозок не окажется оп- тимальным по критерию (3.13).

Если баланс (3.16) не выполняется, то ограничения (3.14) или (3.15) имеют вид неравенств типа «меньше или равно»; транспортная задача в таком случае называется *открытой.* Для решения открытой транспортной задачи методом потенциалов ее сводят к закрытой за- даче путем ввода или фиктивного потребителя, если в неравенства

превращаются условия (3.15), или фиктивного поставщика — в слу- чае превращения в неравенства ограничений (3.14).

Рассмотрим этапы реализации *метода потенциалов* для закры- той транспортной задачи более подробно. Прежде всего, следует от- метить, что при условии баланса (3.16) ранг системы линейных урав-

нений (3.14), (3.15) равен

*m*  *n* 1

. Таким образом, из общего числа

*m*  *n*

неизвестных, базисных неизвестных будет

*m*  *n* 1. Вследствие

этого при любом допустимом базисном распределении в матрице пе- ревозок (таблице поставок), представленной в общем виде в табл. 3.1,

будет занято ровно

*m*  *n* 1

клеток, которые будем называть *базис-*

*ными* в отличие от остальных *свободных* клеток. Занятые клетки бу- дем, например, отмечать диагональной чертой (см. табл. 3.1).

Таблица 3.1 Пример решения транспортной задачи методом потенциалов

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Мощности поставщиков | Мощности потребителя | | | |
| *b*1 | *b*2 |  | *bn* |
| *a*1 | с11/х11 | с12 /х12 |  | с1n/х1n |
| *a*2 | c21/х21 | c22/х22 |  | c2n/х2n |
|  |  |  |  |  |
| *am* | cm1/хm1 | cm2/хm12 |  | cmn/хmn |

*Этап 1.* Первоначальное закрепление потребителей за постав- щиками.

Рассмотрим два метода получения начального распределения (начального опорного плана): метод наименьших стоимостей и метод Фогеля. При каждом из этих методов при заполнении некоторой клетки, кроме последней, вычеркивается или только строка матрицы перевозок, или только столбец; лишь при заполнении последней клет- ки вычеркиваются и строка, и столбец. Такой подход будет гаранти-

ровать, что базисных клеток будет ровно *m*  *n*  1. Если при заполне-

нии некоторой (не последней) клетки одновременно удовлетворяются мощности и поставщика, и потребителя, то вычеркивается, например, только строка, а в соответствующем столбце заполняется незанятая клетка так называемой «нулевой поставкой», после чего вычеркивает-

ся и столбец. Для идентификации клетки обычно в скобках указыва- ются номера ее строки и столбца.

В различных модификациях метода *наименьших стоимостей*

заполнение клеток матрицы перевозок проводится с учетом значений

величин *cij .* Так, в модификации *двойного предпочтения* отмечают

клетки с наименьшими стоимостями перевозок сначала по каждой строке, а затем по каждому столбцу. Клетки, имеющие две отметки, заполняют в первую очередь, затем заполняют клетки с одной отмет- кой, а данные о нераспределенном грузе записывают в неотмеченные клетки с наименьшими стоимостями. При этом из двух клеток с оди- наковой стоимостью перевозок предпочтение отдают клетке, через которую осуществляется больший объем перевозок. Вычеркивание строк и столбцов при заполнении клеток проводится по описанным выше правилам.

Пример начального распределения методом наименьших стои- мостей двойного предпочтения для некоторых исходных данных представлен в табл. 3.2, в которой указаны цены перевозки одной единицы товара от поставщика к потребителю. В данном случае транспортная задача имеет закрытый вид.

Таблица 3.2 Пример решения транспортной задачи методом наименьшей стоимости двойного предпочтения

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Мощность  поставщиков |
| *А* | *В* | *С* | *D* |
| I | 4 | 5 | 2 | 3 | 60 |
| II | 1 | 3 | 6 | 2 | 100 |
| III | 6 | 2 | 7 | 4 | 120 |
| Мощность потребителя | 30 | 100 | 40 | 110 | 280 / 280 |

Так, стоимость перевозки единицы груза от поставщика I потре- бителю *А* составляет 4 денежные единицы, а от поставщика II потре- бителю *В* – 3 денежные единицы.

Необходимо заполнить клетки так (записать еще и объемы пере- возок), чтобы в итоге получить наименьшую результирующую стои- мость перевозок всего товара с баз в магазины.

Для этого вначале отметим индексом *m* клетки с наименьшей стоимостью перевозок по горизонтали (табл. 3.3).

Таблица 3.3 Распределение наименьших стоимостей перевозок по горизонтали

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Мощность поставщиков |
| *А* | *В* | *С* | *D* |
| I | 4 | 5 | 2*m* | 3 | 60 |
| II | 1*m* | 3 | 6 | 2 | 100 |
| III | 6 | 2*m* | 7 | 4 | 120 |
| Мощность потребителя | 30 | 100 | 40 | 110 | 280 / 280 |

Теперь отметим индексом *m* клетки с наименьшей стоимостью перевозки по вертикали (учтем, что может быть и два индекса) (табл. 3.4).

Таблица 3.4 Распределение наименьших стоимостей перевозок по вертикали

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Мощность  поставщиков |
| *А* | *В* | *С* | *D* |
| I | 4 | 5 | 2*mm* | 3 | 60 |
| II | 1*mm* | 3 | 6 | 2*m* | 100 |
| III | 6 | 2*mm* | 7 | 4 | 120 |
| Мощность потребителя | 30 | 100 | 40 | 110 | 280 / 280 |

Всего надо заполнить

*m*  *n*  1

клеток, где *m* – число баз, *n* –

число магазинов, в нашем случае должно быть ных клеток.

3  4 1  6

заполнен-

Мы отметили четыре клетки. Заполним пока их, а потом недос-

тающие две (ранг матрицы 4  3 1  6 , т. е. надо заполнить 6 клеток

из 12 ). Здесь 4 – число магазинов, 3 – число баз.

Порядок заполнения клеток: (2; 1), (3; 2), (1; 3), (2; 4) (табл. 3.5).

Таблица 3.5 Определение наименьшей стоимости перевозки

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Мощность  поставщиков |
| *А* | *В* | *С* | *D* |
| I | 4 | 5 | 2*mm*/40 | 3 | 60 |
| II | 1*mm*/30 | 3 | 6 | 2*m*/70 | 100 |
| III | 6 | 2*mm*/100 | 7 | 4 | 120 |
| Мощность потребителя | 30 | 100 | 40 | 110 | 280 / 280 |

Выбираем оставшиеся две клетки по минимальной цене пере- возки. Минимальная цена 3 . Ее имеют две клетки: (2; 2) и (1; 4). Клетку (2; 2) заполнять нельзя, так как второй магазин загружен пол- ностью. Осталась клетка (1; 4). С базы I можно поставить только 20 единиц товара (поскольку сорок единиц уже поставлены в третий ма- газин).

Следующая наименьшая цена 4 . Ей соответствуют клетки (1; 1) и (3; 4). Клетку (1; 1) заполнять не можем, поскольку первый магазин загружен полностью. В клетку (3; 4) можно поставить 20 единиц то- вара. Таким образом, заполнены все клетки (табл. 3.6).

Таблица 3.6 Итоговая таблица решения транспортной задачи

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Мощность  поставщиков |
| *А* | *В* | *С* | *D* |
| I | 4 | 5 | 2*mm*/ 40 | 3/ 20 | 60 |
| II | 1*mm*/ 30 | 3 | 6 | 2*m*/ 70 | 100 |
| III | 6 | 2*mm*/ 100 | 7 | 4/ 20 | 120 |
| Мощность потребителя | 30 | 100 | 40 | 110 | 280 / 280 |

Проверяем сумму товара по горизонтали (по базам) и по верти- кали (по магазинам).

Суммарные затраты на перевозки (см. табл. 3.6) составляют:

*f* *X*  1 30  2 100  2  40  2  70  3  20  4  20  590.

Ранг матрицы перевозок равен клеток.

3  4 1  6 . И у нас заполнено 6

Метод Фогеля основан на вычислении «штрафной стоимости», которая выражает сумму переплаты за доставку груза каждого по- ставщика и потребителя. Штрафная стоимость для каждой строки и столбца – разность между стоимостью наиболее дешевого маршрута и стоимостью следующего за ним маршрута с точки зрения критерия минимизации стоимости перевозок.

Алгоритм распределения перевозок методом Фогеля.

1. Вычислить значения штрафной стоимости для каждой строки и каждого столбца.
2. Выбрать строку или столбец с наибольшим значением штраф- ной стоимости, и в клетку с наименьшим значением стоимости пере- возки для данной строки и столбца поместить наибольшее количество продукта.
3. Провести корректировку итоговых значений по строкам и столбцам.
4. В строках или столбцах, в которых предложение или спрос равны нулю, ставится прочерк.
5. Вернуться к шагу 1 и пересчитать штрафные стоимости без учета клеток, в которых указаны перевозки, или клеток, где стоит прочерк.

Пусть дана исходная таблица поставщиков, магазинов и стоимо- сти перевозок (табл. 3.7)

Таблица 3.7 Алгоритм решения транспортной задачи методом Фогеля

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Торговый склад | Розничный магазин | | | Общее предложение |
| А | В | С |
| P | ***10*** | ***20*** | ***5*** | 9 |
| Q | ***2*** | ***10*** | ***8*** | 4 |
| R | ***1*** | ***20*** | ***7*** | 8 |
| Общая потребность | 3 | 5 | 6 | 14 / 21 |

Здесь полужирным курсивом выделены цены перевозок от по- ставщиков потребителям. Мы видим, что задача открытая и, посколь- ку мощности поставщиков больше, вводим фиктивный магазин «Ф» с мощностью 7 единиц (табл. 3.8).

Таблица 3.8 Алгоритм решения транспортной задачи методом Фогеля (этап 1)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Торговый склад | Розничный магазин | | | | Общее предложение |
| А | В | С | Ф |
| P | ***10*** | ***20*** | ***5*** | ***0*** | 9 |
| Q | ***2*** | ***10*** | ***8*** | ***0*** | 4 |
| R | ***1*** | ***20*** | ***7*** | ***0*** | 8 |
| Общая потребность | 3 | 5 | 6 | 7 | 21 / 21 |

Теперь определяем штрафные стоимости, для чего вводим гра- фы штрафной стоимости (табл. 3.9).

Таблица 3.9 Алгоритм решения транспортной задачи методом Фогеля (этап 2)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Торговый  склад | Розничный магазин | | | | Общее  предлож. | Штрафная  стоимость |
| А | В | С | Ф |
| P | ***10*** | ***20*** | ***5*** | ***0*** | 9 | 5 15 10 |
| Q | ***2*** | ***10*** | ***8*** | ***0*** | 4 | 6 8 2 |
| R | ***1*** | ***20*** | ***7*** | ***0*** | 8 | 6 19 13 |
| Общая  потребность | 3 | 5 | 6 | 7 | 21 / 21 |  |
| 1-й штраф | 1=2-1 | 10=20-10 | 2=7-5 | 0=0-0 |  |  |
| 2-й штраф | 9=10-1 | 0=20-20 | 3=8-5 | 0=0-0 |  |  |
| 3-й штраф | 8=10-2 | - | 1=8-7 | 0=0-0 |  |  |

Теперь составляем начальный план перевозок методом Фогеля (табл. 3.10).

Таблица 3.10

Начальный план перевозок методом Фогеля

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Торговый  склад | Розничный магазин | | | | Общее  предлож. | Штрафная  стоимость |
| А | В | С | Ф |
| P | ***10*** | ***20*** 1 | ***5*** 6 | ***0*** 2 | 9-1-1-2=0 | 5 15 10 |
| Q | ***2*** | ***10*** 4 | ***8*** | ***0*** | 4-4=0 | 6 8 2 |
| R | ***1*** 3 | ***20*** | ***7*** | ***0*** 5 | 8-3-5=0 | 6 19 13 |
| Общая  потребность | 3-3=0 | 5-1-4=0 | 6-6=0 | 7-2-5=0 | 21 / 21 |  |
| 1-й штраф | 1=2-1 | 10=20-10 | 2=7-5 | 0=0-0 |  |  |
| 2-й штраф | 9=10-1 | 0=20-20 | 3=8-5 | 0=0-0 |  |  |
| 3-й штраф | 8=10-2 | - | 1=8-7 | 0=0-0 |  |  |

*Этап 2.* Проверка оптимальности полученного плана перевозок.

Введем специальные показатели *ui* для каждой строки матрицы

перевозок (каждого поставщика), где

*i*  1, *m* , и показатели

*v j* для ка-

ждого столбца (каждого потребителя), где

*j*  1, *n*

(так называемые по-

тенциалы). Эти показатели называются потенциалами поставщиков и потребителей, их удобно интерпретировать как цены продукта в соот- ветствующих пунктах поставщиков и потребителей (теневые цены). Потенциалы подбирают таким образом, чтобы для заполненной клет-

ки *i*; *j*

выполнялось равенство (3.17) –

*v j*  *ui*  *cij* . Совокупность

уравнений вида (3.17), составленных для всех заполненных клеток

(всех базисных неизвестных), образует систему

*n*  *m* 1

линейных

уравнений с

*n*  *m*

неизвестными *ui*

и *v j*

. Эта система всегда совме-

стна, причем значение одного из неизвестных можно задавать произ-

вольно, например

*u*1  0 . Тогда значения остальных неизвестных на-

ходятся из системы однозначно.

Полагаем *u*  0 . Далее, по заполненной клетке 1;3

1

*v*3 (*v j*  *ui*  *cij* ):

находим

*v*3  *u*1  *c*13

 0  2  2; 

*v*3  2 .

Далее по заполненной клетке 1;4 находим

*v*4 :

*v*4  *u*1  *c*14

 0  3  3

 *v*4

 3 .

По клетке 2;4 находим *u*2:

*v*4

По клетке 3;4

 3  *u*2  *c*24

находим *u*3 :

 *u*2  2

 *u*2

 1.

*v*4  3  *u*3  *c*34  *u*2  4  *u*3

 1.

По клетке 3;2 находим *v* :

2

*v*2  *u*3  *c*32  1 2  1 

*v*2  1.

По клетке 2;1 находим *v* :

1

*v*1  *u*2  *c*21  11  2  *v*1  2 .

В табл. 3.6 вставим соответствующие столбец и строку и, запол- нив её найденными значениями, получим табл. 3.11.

Таблица 3.11 Итоговая транспортная таблица по методу Фогеля

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | *ui* | Мощность  поставщиков |
| *А* | *В* | *С* | *D* |
| I | 4 | 5 | 2*mm*/ 40 | 3/ 20 | *0* | 60 |
| II | 1*mm*/ 30 | 3 | 6 | 2*m*/ 70 | *1* | 100 |
| III | 6 | 2*mm*/ 100 | 7 | 4/ 20 | *-1* | 120 |
| *vj* | *2* | *1* | *2* | *3* |  |  |
| Мощность потребителя | 30 | 100 | 40 | 110 |  | 280 / 280 |

Чтобы оценить оптимальность найденного распределения, для

всех клеток *i*; *j* матрицы перевозок определяются их *оценки,* кото-

рые обозначим через *dij ,* по формуле

*i*

*dij*

 *u*

 *cij*

 *v*

. (3.18)

Выражение

*j*

*ui*  *cij*

можно трактовать как сумму цены продукта у

поставщика и стоимости перевозки; эта сумма путем вычитания срав-

нивается с ценой продукта у соответствующего потребителя *v j .* Оче-

видно, оценки заполненных клеток равны нулю (цена потребителя покрывает цену поставщика и стоимость перевозок). Таким образом, об оптимальности распределения можно судить по величинам оценок свободных клеток. Если оценка некоторой свободной клетки отрица- тельна, это можно интерпретировать так: цена, предлагаемая соответ- ствующим потребителем, больше суммы цены поставщика и стоимо- сти перевозки, т. е. если бы эта клетка была занята, то можно было бы получить дополнительный экономический эффект. Следовательно, условием оптимальности распределения служит условие неотрица- тельности оценок свободных клеток матрицы перевозок. Определим

оценки свободных клеток матрицы перевозок из табл. 3.11.

*d*11 *d*

 *u*

 *u*

1

 *c*11  *v*

 *c*  *v*

1

 0  4  2  2 ,

 0  2  2  0,

*d*12 *d*

 *u*

 *u*

1

 *c*12  *v*

 *c*  *v*

 0  5 1  4,

 0  3  3  0 ,

2

13

*d*21

*d*

1

 *u*

2

 *u*

13

 *c*21

 *c*

3

 *v*

1

 *v*

 11 2  0 ,

 1 6  2  5,

14

*d*22

*d*

1

 *u*

2

 *u*

14

 *c*22

 *c*

4

 *v*

2

 *v*

 1 3 1  3,

 1 2  3  0 ,

23 2

*d*  *u*  *c*

23

 *v*

3

 1 6  2  3 ,

24 2

*d*  *u*  *c*

24

 *v*

4

 1 2 1  0 ,

31 3

*d*  *u*

31 1

 *c*   *v*

 1 7  2  4 ,

32 3

*d*  *u*

32 2

 *c*  *v*

 1 4  3  0.

33 3 33 3 34 3 34 4

Получим матрицу оценок:

 2



4 0 0



*dij*

  0



3



3 5 0 .

0 4 

0



Поскольку все оценки неотрицательны, то нет возможности улучшить данный план перевозок, т. е. он оптимален (напомним, что суммарные затраты на перевозку по этому плану равны 590). Кроме того, в данном случае оценки всех свободных клеток строго больше нуля, т. е. любой другой план, предусматривающий занятие хотя бы

одной из этих клеток, будет более дорогостоящим, а следовательно, неоптимальным. Это говорит о том, что найденный оптимальный план является *единственным.*

Наличие нулевых оценок свободных клеток в оптимальном пла- не перевозок, наоборот, свидетельствует о наличии альтернативных оптимальному планов.

Рассмотрим пример открытой транспортной задачи.

Стоимость доставки единицы груза из каждого пункта отправ- ления в соответствующие пункты назначения задана матрицей тари- фов (табл. 3.12).

Таблица 3.12 Пример открытой транспортной задачи

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | Запасы |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 3 | 20 | 8 | 13 | 4 | 80 |
| 2 | 4 | 4 | 18 | 14 | 3 | 60 |
| 3 | 10 | 4 | 18 | 8 | 6 | 30 |
| 4 | 7 | 19 | 17 | 10 | 1 | 60 |
| Потребности | 10 | 30 | 40 | 50 | 70 | 230/200 |

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи:

4

*ai*

*i*1

5

 80  60  30  60  230,

*bj*  10  30  40  50  70  200 .

*j*1

Как видно, суммарная потребность груза в пунктах назначения меньше запасов груза на базах. Следовательно, модель исходной транспортной задачи является открытой. Чтобы получить закрытую модель, введем дополнительный (фиктивный) магазин с запасом гру- за, равным 30 (230–200). Тариф перевозки единицы груза в этот фик- тивный магазин из всех баз полагаем равным нулю.

Занесем исходные данные в распределительную табл. 3.13.

Таблица 3.13

Распределительная таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запасы |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 (фикт.) |
| 1 | 3*mm* | 20 | 8 | 13 | 4 | 0 | 80 |
| 2 | 4 | 4 *m* | 18 | 14 | 3 *m* | 0 | 60 |
| 3 | 10 | 4 *m* | 18 | 8 *m* | 6 | 0 | 30 |
| 4 | 7 | 19 | 17 | 10 | 1 *mm* | 0 | 60 |
| Потребности | 10 | 30 | 40 | 50 | 70 | 30 | 230/230 |

Используя метод наименьшей стоимости двойного предпочте- ния, построим первый опорный план транспортной задачи, поместив в квадратные скобки количество товара, перевозимого от конкретного поставщика определенному потребителю (табл. 3.14).

Таблица 3.14 Первый опорный план транспортной задачи

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | Запасы | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |  |
| 1 | 3*mm* [10] | 20 | 8[40] | 13[20] | 4 | 0[10] | 80 |
| 2 | 4 | 4 *m*[30] | 18 | 14 | 3 *m*[10] | 0[20] | 60 |
| 3 | 10 | 4 | 18 | 8 *m*[30] | 6 | 0 | 30 |
| 4 | 7 | 19 | 17 | 10 | 1*mm* [60] | 0 | 60 |
| Потребности | 10 | 30 | 40 | 50 | 70 | 30 | 230/230 |

Следовательно, план перевозок будет

*f* *X*  3 10  8  40  13 20  4  30  3 10  8  30  1 60  1060.

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность магази- нов удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транс- портной задачи.

Подсчитаем число занятых клеток табл. 3.14, их 9, а должно быть *m* + *n* – 1 = 9. Следовательно, опорный план является невырож- денным. Проверим оптимальность опорного плана. Найдем потен-

циалы *ui* , *v j*

по занятым клеткам таблицы, в которых

*v j*  *ui*

 *cij* , пола-

гая, что *u*1  0 .

-u1 + v1 = 3; 0 + v1 = 3; v1 = 3, -u1 + v3 = 8; 0 + v3 = 8; v3 = 8,

-u1 + v4 = 13; 0 + v4 = 13; v4 = 13, -u3 + v4 = 8; 13 – u3 = 8; u3 = 5,

-u1 + v6 = 0; 0 + v6 = 0; v6 = 0, -u2 + v6 = 0; 0 + u2 = 0; u2 = 0,

-u2 + v2 = 4; 0 + v2 = 4; v2 = 4 , -u2 + v5 = 3; 0 + v5 = 3; v5 = 3,

-u4 + v5 = 1; 3 – u4 = 1; u4 = 2.

Поскольку

*dij*

 *ui*  *cij*  *v j* , то матрица оценок будет иметь вид:

*dij*

 0



 1



12



 6

16 0

0 10

5 15

17 11

0 1 0



1 0 0

.

0 8 5



1 0 2

Опорный план не является оптимальным, так как существуют

оценки свободных клеток, для которых

*dij*

 0 , в частности

*d*44

 1.

Для выбранной клетки строится замкнутая линия (контур), начальная вершина которой лежит в выбранной клетке, а все остальные верши- ны находятся в занятых клетках; при этом направления отдельных от- резков контура могут быть только горизонтальными и вертикальны- ми. Вершиной контура, кроме первой, является занятая клетка, где отрезки контура образуют один прямой угол (нельзя рассматривать как вершины клетки, где горизонтальные и вертикальные отрезки контура пересекаются). Очевидно, число отрезков контура, как и его вершин, будет четным. В вершинах контура расставляются поочеред- но знаки «+» и «–», начиная со знака «+» в выбранной свободной клетке.

Величина перераспределяемой поставки определяется как наи- меньшая из величин поставок в вершинах контура со знаком «–», и на это значение увеличиваются поставки в вершинах со знаком «+» и уменьшаются поставки в вершинах со знаком «–». Это правило гаран- тирует, что в вершинах контура не появятся отрицательные поставки. Начальная выбранная клетка окажется занятой, в то время как одна из занятых клеток при этом обязательно освободится. Если величина пе- рераспределяемой поставки равна поставкам не в одной, а в несколь- ких вершинах контура со знаком «–», то освобождается только одна клетка, обычно с наибольшей стоимостью перевозки, а все другие клетки остаются занятыми с нулевой поставкой.

В перспективную клетку (4; 4) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «–», «+», «–». Цикл приведен в табл. 3.15.

Таблица 3.15 Величина перераспределяемой поставки товара

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запасы |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 3[10] | 20 | 8[40] | 13[20][**–**] | 4 | 0[10][**+**] | 80 |
| 2 | 4 | 4[30] | 18 | 14 | 3[10][**+**] | 0[20][**–**] | 60 |
| 3 | 10 | 4 | 18 | 8[30] | 6 | 0 | 30 |
| 4 | 7 | 19 | 17 | 10[+] | 1[60][–] | 0 | 60 |
| Потребности | 10 | 30 | 40 | 50 | 70 | 30 | 230/230 |

Из грузов *xij* , стоящих в минусовых клетках, выбираем наи-

меньшее значение, т. е. *min* (2, 6) = 20. Прибавляем 20 к объемам гру-

зов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 20 из *xij* , стоящих в ми-

нусовых клетках. В результате получим новый опорный план (табл. 3.16).

Таблица 3.16

Новый опорный план

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запасы |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 3[10] | 20 | 8[40] | 13[0] | 4 | 0[30] | 80 |
| 2 | 4 | 4[30] | 18 | 14 | 3[30] | 0 | 60 |
| 3 | 10 | 4 | 18 | 8[30] | 6 | 0 | 30 |
| 4 | 7 | 19 | 17 | 10[20] | 1[40] | 0 | 60 |
| Потребности | 10 | 30 | 40 | 50 | 70 | 30 | 230/230 |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем потенциалы

*ui* и *v j*

по занятым клеткам табл. 3.16, в которых

*v j*  *ui*

 *cij* , полагая,

что *u*1  0 .

-u1 + v1 = 3; 0 + v1 = 3; v1 = 3, -u1 + v3 = 8; 0 + v3 = 8; v3 = 8,

-u1 + v4 = 13; 0 + v4 = 13; v4 = 13, -u3 + v4 = 8; 13 – u3 = 8; u3 = 5,

-u4 + v4 = 10; 13 – u4 = 10; u4 = 3, -u4 + v5 = 1; -3 + v5 = 1; v5 = 4,

-u2 + v5 = 3; 4 – u2 = 3; u2 = 1, -u2 + v2 = 4; -1 + v2 = 4; v2 = 5,

-u1 + v6 = 0; 0 + v6 = 0; v6 = 0.

Поскольну

*dij*

 *ui*  *cij*  *v j* , то матрица оценок будет иметь вид:

*dij*

 0



 2



12



 7

15 0 0

0 11 2

4 15 0

17 12 0

0 0



0 0

.

7 5



0 3

Опорный план является оптимальным. Затраты составят:

*f* *X*  3 10  8  40  4  30  3  30  8  30  10  20 1 40  1040 .

# Задача о назначениях

С помощью *задачи о назначениях* можно получить ответ на во- просы типа: как распределить рабочих по станкам, чтобы общая вы- работка была наибольшей или затраты на заработную плату наи- меньшими. Как наилучшим образом распределить экипажи самоле- тов, как назначить людей на различные должности (отсюда и назва- ние задачи) и т. д.

Математически такие задачи относятся к тому же типу распре- делительных задач, что и транспортная задача, с той особенностью, что здесь объемы наличных и требующихся ресурсов для выполнения

каждой работы равны единице ( *ai*

 *bj*

 1), а все переменные

*xij*

либо

равны единице, если

*i*  *й*

работник назначен на

*j*  *ю*

работу, либо

равны нулю в других случаях. Исходные данные задачи о назначени- ях группируются в таблице, которая называется *матрицей оценок*, а результаты – в *матрице назначений*.

Задача о назначениях в общем виде может быть сформулирова- на следующим образом. Имеется *n* работников, которые могут вы-

полнять *n* работ, причем использование

*i*  *го*

работника на

*j*  *й*

ра-

боте, например, приносит доход

*cij* . Требуется поручить каждому из

работников выполнение одной, вполне определенной работы, чтобы максимизировать в данном случае суммарный доход.

Введем переменные:

*xij*

 1,если *i*-й работник выполняет *j*-ю работу,



0 - в противном случае.

Задача состоит в том, чтобы найти распределение

*X*  *x* 

ра-

ботников по работам (т. е. найти матрицу назначений), которое мак- симизирует целевую функцию

*ij*

при ограничениях

*f* *X*  *n*

*i* 1

*n*



*j* 1

*cij*

*xij*

 *max*

(3.19)

*n*

 *xij*

*j* 1

*n*

 *xij*

*i*1

 1,

 1,

*i*  1, *n* , (3.20)

*j*  1, *n* , (3.21)

причем

*xij*

равны либо 0 , либо 1 (так называемые *булевы переменные*)

для всех *i*, *j*  1, *n* .

Ограничения (3.20) отражают условие того, что за каждым ра- ботником может быть закреплена только одна работа, а ограничения (3.21) означают, что для выполнения каждой работы может быть вы- делен только один работник.

Если в задаче о назначениях элементы матрицы оценок пред- ставляют собой, например, время выполнения каждым работником любой из работ, то целевая функция этой задачи будет минимизиро- ваться. Отметим также, что при решении задач о назначениях часто используются алгоритмы и методы решения транспортных задач, в частности метод потенциалов.

Особенность задачи о назначениях:

* число пунктов производства равно числу пунктов назначения.

Транспортная таблица имеет форму квадрата;

* в каждом пункте назначения объем потребности равен 1. Ве- личина предложения каждого пункта производства равна 1.

Этапы решения задачи о назначениях (венгерский метод).

1. В каждой строке найти минимальный элемент и вычесть его значение из всех элементов данной строки.
2. В каждом столбце найти минимальный элемент и вычесть его значение из всех элементов данного столбца.
3. Найти строку, содержащую только одно нулевое значение стоимости, и в клетку, соответствующую данному значению, помес- тить один элемент. Если такие строки отсутствуют, допустимо начать с любого нулевого значения стоимости.
4. Зачеркнуть оставшиеся нулевые значения данного столбца.
5. Повторять пп. 3 и 4 до тех пор, пока продолжение описанной процедуры окажется невозможным.
6. Провести минимальное число прямых через строки и столбцы матрицы (не по диагоналям) таким образом, чтобы они проходили че- рез все нули, содержащиеся в таблице.
7. Найти наименьший среди элементов, через который не прохо- дит ни одна из проведенных прямых.
8. Вычесть его из всех элементов, через которые не проходят прямые.
9. Прибавить найденный элемент ко всем элементам таблицы, которые лежат на пересечении проведенных ранее прямых.
10. Все элементы матрицы, через которые проходит только одна прямая, оставить без изменения.
11. Повторять пп. 3 и 4 до тех пор, пока продолжение описанной процедуры окажется невозможным.

*Пример решения задачи о назначениях*

Некоторая компания имеет 4 сбытовые базы (*А, В, С, D*) и 4 зака- за (I, II, III, IV), которые необходимо доставить потребителям. Каждое складское помещение может разместить один заказ. Расстояния между складами и потребителями указаны в табл. 3.17. Как следует распре- делить заказы по сбытовым базам, чтобы общая дальность транспор- тировки была минимальной?

Таблица 3.17 Алгоритм решения задачи о назначениях

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Торговая база | Расстояние до потребителя, км | | | |
| I | II | III | IV |
| *A* | 68 | 72 | 75 | 83 |
| *B* | 56 | 60 | 58 | 63 |
| *C* | 38 | 40 | 35 | 45 |
| *D* | 47 | 42 | 40 | 45 |

*Этап 1.* Выявление наименьших значений по строкам:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Торговая  база | Расстояние в км до потребителя | | | | Наименьший  элемент строки |
| I | II | III | IV |
| A | 68 | 72 | 75 | 83 | 68 |
| B | 56 | 60 | 58 | 63 | 56 |
| C | 38 | 40 | 35 | 45 | 35 |
| D | 47 | 42 | 40 | 45 | 40 |

Вычитание наименьшего элемента по строкам:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Торговая база | Расстояние до потребителей, миль | | | | Наименьший элемент строки |
| I | II | III | IV |
| A | 0 | 4 | 7 | 15 | 68 |
| B | 0 | 4 | 2 | 7 | 56 |
| C | 3 | 5 | 0 | 10 | 35 |
| D | 7 | 2 | 0 | 5 | 40 |

Выявление наименьшего элемента по столбцам:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Торговая база | Расстояние до потребителей, миль | | | | Наименьший элемент  строки |
| I | II | III | IV |
| A | 0 | 4 | 7 | 15 | 68 |
| B | 0 | 4 | 2 | 7 | 56 |
| C | 3 | 5 | 0 | 10 | 35 |
| D | 7 | 2 | 0 | 5 | 40 |
| Наименьший  элемент столбца | 0 | 2 | 0 | 5 |  |

Вычитание наименьшего элемента по столбцам:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Торговая  база | Расстояние до потребителей, миль | | | |
| I | II | III | IV |
| A | 0 | 2 | 7 | 10 |
| B | 0 | 2 | 2 | 2 |
| C | 3 | 3 | 0 | 5 |
| D | 7 | 0 | 0 | 0 |

*Этап 2.* Назначения в клетки с нулевым значением.

В первой строке выбираем нулевой элемент и зачеркиваем нуле- вой элемент во второй строке этого же столбца. В третьей строке вы- бираем нулевой элемент и зачеркиваем нулевой элемент в четвертой строке этого же столбца. В четвертой строке зачеркиваем нулевой элемент четвертого столбца этой же строки. (Можно было выбрать и нулевой элемент четвертой строки четвертого столбца).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| [0] | 2 | 7 | 10 |
| --0 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | [0] | 5 |
| 7 | [0] | --0 | --0 |

*Этап 3.* Проведение прямых линий через нулевые элементы.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| [0 | ] | 2 |  | 7 | 10 |  |
| --0 |  | 2 |  | 2 | 2 |
| 3 |  | 3 | [ | 0] | 5 |
|  |  |  |  |  |  |
| 7 |  | [0] | - | -0 | --0 |  |

Наименьший элемент, не лежащий на прямых – 2. Вычтем его из всех элементов, не лежащих на прямых.

[0]

--0

7

[0]

--0

--0

3

0]

[

1

3

0

2

0

8

7

0

Прибавим его к элементам, лежащим на пересечении прямых.

0

--0

3

9

--0

2

0

3

0

1

0

2

0

8

7

0

Получили скорректированную таблицу с назначениями для ну- левых клеток.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 0 | 0 | 7 | 8 |
| 0 | 0 | 2 | 0 |
| 3 | 1 | 0 | 3 |
| 9 | 0 | 2 | 0 |

Запишем первое альтернативное решение.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| [0] | 0 | 7 | 8 |
| 0 | [0] | 2 | 0 |
| 3 | 1 | [0] | 3 |
| 9 | 0 | 2 | [0] |

Согласно исходной таблице 3.17, дальность перевозок:

68 +60 + 35 + 45 = 208 км.

Запишем второе альтернативное решение.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| [0] | 0 | 7 | 8 |
| 0 | 0 | 2 | [0] |
| 3 | 1 | [0] | 3 |
| 9 | [0] | 2 | 0 |

Дальность перевозок:

68 + 42 + 35 + 63 = 208 км.

Запишем третье альтернативное решение.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 0 | [0] | 7 | 8 |
| [0] | 0 | 2 | 0 |
| 3 | 1 | [0] | 3 |
| 9 | 0 | 2 | [0] |

Дальность перевозок:

56 + 72 + 35 + 45 = 208 км.

Общая дальность всех трёх альтернативных решений одинакова.

## ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

**Задание 3.1.** Сформулируйте двойственную задачу из исходной:

*f* *x*  60*x*  50*x*  *max* ,

1

2

1*,*5*x*1  2*x*2  42 ,

 3*x*  2*x*  60 ,



5*x*

1

* 5*x*

2

 200 ,

 1 2

 *x*1  18 .

**Задание 3.2.** Сформулируйте двойственную задачу из исходной:

*f* *x*  3*x*  4*x*  5*x*  *max* ,

1

2 3

1*,*5*x*1  2*x*2  *x*3  15,



 0*,*5*x*1  *x*2  20,



 3*x*1

 4*x*3

 25 ,

 *x*2  *x*3  15 .

**Задание 3.3.** Запишите математическую модель задачи. Сформу- лируйте двойственную задачу из исходной.

Мебельная фабрика выпускает стулья и столы. Для производства используются три ресурса – дерево, человеко-часы, электроэнергия. Максимально возможные суточные запасы этих ресурсов составляют

8 м3, 40 чел.-ч и 25 кВт·ч соответственно. Расходы сырья на 1 единицу изделий приведены в таблице:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ресурсы | Расход исходных продуктов на 1 изделие | |
| стулья | столы |
| Дерево, м3 | 0,1 | 0,2 |
| Трудоемкость, человеко-час | 1,5 | 3 |
| Электроэнергия, кВт·ч | 0,5 | 2 |

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на столы не превышает спрос на стулья более чем на 25 штук. Кроме того, ус- тановлено, что спрос на столы не превышает 50 штук в сутки. Опто- вая цена одного стула равна 500 руб., одного стола – 1,4 тыс. руб.

**Задание 3.4.** Запишите математическую модель задачи. Сформу- лируйте двойственную задачу из исходной.

Для производства карамели двух видов *А* и *В* кондитерская фаб- рика использует сахар и фруктовое пюре. Норма затрат этих продук- тов, а также затраты на 1 кг карамели, цена ее реализации и общий за- пас производственных ресурсов указаны в таблице.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Ресурсы | Норма затрат ресурсов  на 1 кг изделия | | Общий запас ресурсов |
| ккарамель *А* | карамель *В* |
| Сахар, кг | 0,3 | 0,5 | 150 |
| Фруктовое пюре, кг | 0,4 | 0,2 | 100 |
| Трудоемкость, человек. час | 0,4 | 0,5 | 160 |
| Электроэнергия, кВт\*ч | 0,2 | 0,1 | 90 |
| Цена 1 кг карамели, руб. | 45 | 50 | – |

Известно, что спрос на карамель *В* не превышает спрос на кара- мель *А* более, чем 10 единиц в сутки.

**Задание 3.5.** Два торговых склада поставляют продукцию в че- тыре магазина. Издержки транспортировки продукции с торговых складов в магазины, наличие продукции на складах и потребности ма- газинов приведены в таблице.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Торговый склад | Транспортные издержки | | | | Предложение продукции, ед. |
| Магазин | | | |
| *A* | *B* | *C* | *D* |
| 1 | 4 | 8 | 5 | 6 | 100 |
| 2 | 8 | 2 | 4 | 7 | 200 |
| Потребность в продукции, ед. | 50 | 100 | 75 | 75 | – |

Требуется найти распределение перевозок, позволяющее свести к минимуму общие транспортные издержки:

* + методом минимальной стоимости;
  + методом северо-западного угла;
  + методом Фогеля.

Рассчитайте транспортные издержки для каждого распределе- ния. Какое распределение наиболее эффективно?

**Задание 3.6.** Три завода поставляют некую разновидность стали на 5 торговых складов. Спрос каждого торгового склада, наличие ста- ли на заводах, а также значения стоимости транспортировки 1 т стали приведены в таблице.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Завод | Транспортные издержки, руб. за единицу | | | | | Предложение, т |
| Торговый склад | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *А* | 20 | 27 | 33 | 25 | 34 | 200 |
| *В* | 22 | 36 | 34 | 28 | 26 | 250 |
| *С* | 26 | 29 | 27 | 26 | 28 | 300 |
| Потребность, т | 100 | 150 | 200 | 100 | 200 | – |

Требуется определить минимальную стоимость транспортиров- ки (распределить и определить оптимальность решения, при необхо- димости перераспределить и определить оптимальность нового рас- пределения).

**Задание 3.7.** Три торговых склада *X*, *Y*, *Z* могут осуществлять поставки 6, 3 и 4 единиц продукта в три магазина *L*, *M*, *N*, спрос кото- рых равен 4, 5 и 1 единицам соответственно. Значения единичной стоимости транспортировки указаны в таблице.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Торговый склад | Транспортные издержки, руб. за единицу | | | Общее предложение |
| Магазины | | |
| *L* | *M* | *N* |
| *X* | 6 | 4 | 9 | 6 |
| *Y* | 5 | 3 | 2 | 3 |
| *Z* | 2 | 3 | 6 | 4 |
| Общая потребность | 4 | 5 | 1 | – |

Как следует распределить перевозки, чтобы общая стоимость транспортировки была минимальной?

**Задание 3.8.** Решите транспортную задачу, распределив ресурсы методом Фогеля.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Торговый склад | Транспортные издержки | | | | Предложение |
| Магазин | | | |
| A | B | C | D |
| I | 5 | 4 | 6 | 3 | 200 |
| II | 1 | 10 | 2 | 1 | 300 |
| III | 2 | 3 | 3 | 1 | 100 |
| Потребность | 150 | 150 | 250 | 50 |  |

**Задание 3.9.** Решите транспортную задачу, распределив ресурсы методом Фогеля.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Торговый склад | Транспортные издержки | | | Предложение |
| Магазины | | |
| А | В | С |
| 1 | 7 | 3 | 4 | 80 |
| 2 | 5 | 7 | 8 | 60 |
| 3 | 3 | 8 | 2 | 60 |
| Потребность | 30 | 70 | 60 |  |

**Задания 3.10–3.19.** Решите транспортные задачи

**3.10**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Торговый склад | Транспортные издержки | | | | Предложение |
| Магазин | | | |
| A | B | C | D |
| I | 6 | 5 | 4 | 0 | 500 |
| II | 8 | 8 | 2 | 6 | 300 |
| III | 9 | 0 | 7 | 6 | 100 |
| Потребность | 400 | 200 | 150 | 250 |  |

**3.11**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Торговый склад | Транспортные издержки | | | | Предложение |
| Магазин | | | |
| A | B | C | D |
| I | 5 | 1 | 2 | 4 | 92 |
| II | 2 | 5 | 0 | 3 | 45 |
| III | 0 | 2 | 2 | 5 | 63 |
| Потребность | 60 | 40 | 36 | 14 |  |

**3.12**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Торговый склад | Транспортные издержки | | | | Предложение |
| Магазин | | | |
| A | B | C | D |
| I | 0 | 5 | 4 | 2 | 30 |
| II | 2 | 5 | 0 | 3 | 50 |
| III | 3 | 2 | 0 | 5 | 120 |
| Потребность | 40 | 30 | 20 | 10 |  |

**3.13**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Торговый склад | Транспортные издержки | | | | Предложение |
| Магазин | | | |
| A | B | C | D |
| I | 5 | 6 | 1 | 4 | 80 |
| II | 8 | 0 | 6 | 5 | 320 |
| III | 5 | 4 | 3 | 0 | 100 |
| Потребность | 250 | 100 | 150 | 50 |  |

**3.14**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Торговый склад | Транспортные издержки | | | | Предложение |
| Магазин | | | |
| A | B | C | D |
| I | 3 | 0 | 0 | 6 | 140 |
| II | 5 | 2 | 3 | 1 | 160 |
| III | 1 | 1 | 2 | 4 | 150 |
| Потребность | 50 | 70 | 130 | 150 |  |

**3.15**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Торговый склад | Транспортные издержки | | | | Предложение |
| Магазин | | | |
| A | B | C | D |
| I | 4 | 7 | 1 | 1 | 100 |
| II | 5 | 0 | 3 | 4 | 50 |
| III | 3 | 0 | 2 | 8 | 70 |
| Потребность | 10 | 80 | 90 | 20 |  |

**3.16**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Торговый склад | Транспортные издержки | | | | Предложение |
| Магазин | | | |
| A | B | C | D |
| I | 4 | 1 | 2 | 3 | 100 |
| II | 3 | 6 | 0 | 4 | 200 |
| III | 0 | 2 | 3 | 5 | 150 |
| Потребность | 40 | 60 | 100 | 50 |  |

**3.17**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Торговый склад | Транспортные издержки | | | | Предложение |
| Магазин | | | |
| A | B | C | D |
| I | 4 | 3 | 2 | 0 | 400 |
| II | 10 | 10 | 4 | 7 | 200 |
| III | 12 | 0 | 11 | 5 | 100 |
| Потребность | 300 | 150 | 100 | 200 |  |

**3.18**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Торговый склад | Транспортные издержки | | | | Предложение |
| Магазин | | | |
| A | B | C | D |
| I | 3 | 0 | 2 | 1 | 200 |
| II | 2 | 3 | 0 | 4 | 70 |
| III | 5 | 8 | 7 | 3 | 80 |
| Потребность | 20 | 40 | 80 | 60 |  |

**3.19**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Торговый склад | Транспортные издержки | | | | Предложение |
| Магазин | | | |
| A | B | C | D |
| I | 2 | 7 | 4 | 3 | 40 |
| II | 5 | 0 | 12 | 7 | 30 |
| III | 8 | 1 | 0 | 13 | 50 |
| Потребность | 10 | 20 | 40 | 60 |  |

**Задание 3.20.** Решите задачу венгерским методом.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Торговый агент | Сумма выручки, полученная торговым агентом  с торговой точки в день, тыс. руб. | | | |
| Торговая точка | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 18 | 20 | 19 | 11 |
| 2 | 14 | 17 | 19 | 26 |
| 3 | 16 | 15 | 13 | 11 |
| 4 | 10 | 13 | 12 | 14 |

Необходимо закрепить торговых агентов за торговыми точками так, чтобы общая ежедневная выручка была максимальной.

**Задание 3.21.** Решите задачу о назначениях

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| База | Расстояние до потребителя | | | |
| I | II | III | IV |
| A | 3 | 8 | 3 | 10 |
| B | 8 | 7 | 2 | 9 |
| C | 6 | 4 | 2 | 7 |
| D | 8 | 4 | 2 | 3 |
| E | 9 | 10 | 6 | 9 |

**Задание 3.22.** Решите задачу о назначениях

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| База | Расстояние до потребителя | | | |
| I | II | III | IV |
| A | 3 | 9 | 2 | 3 |
| B | 6 | 1 | 5 | 6 |
| C | 9 | 4 | 7 | 10 |
| D | 2 | 5 | 4 | 2 |
| E | 9 | 6 | 2 | 4 |

**Задание 3.23.** Решите задачу о назначениях.

Администрация деревоперерабатывающего предприятия приня- ла на работу 4 человека. Каждый из них имеет различные способно- сти и навыки и затрачивает различное время на выполнение опреде- ленной работы. В настоящее время необходимо выполнить 4 вида ра- бот. Время выполнения работы каждым работником приведено в таб- лице.

Требуется назначить на каждый вид работы одного из работни- ков. Как это нужно сделать, чтобы общее время, необходимое для за- вершения всех видов работ, было минимальным?

Найти оптимальное и альтернативное решения.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Работник | Время выполнения работы, ч | | | |
| Работа | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| М1 | 3 | 7 | 5 | 8 |
| М2 | 2 | 4 | 4 | 5 |
| М3 | 4 | 7 | 2 | 8 |
| М4 | 9 | 7 | 3 | 8 |

**Задание 3.24.** Рассмотреть задачу распределения четырех рабо- чих по четырем станкам. Соответствующие коэффициенты стоимости

в долларах приведены в таблице. Рабочий 1 не может работать на станке 3, а рабочий 3 – на станке 4. Найти решение.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Работник | Время выполнения работы, ч | | | |
| Станки | | | |
| С1 | С2 | С3 | С4 |
| Р1 | 5 | 5 | 0 | 3 |
| Р2 | 7 | 4 | 2 | 3 |
| Р3 | 9 | 3 | 5 | 0 |
| Р4 | 7 | 2 | 6 | 7 |

**Задание 3.25.** Пусть в задании 3.24 введен еще один станок. Со- ответствующие коэффициенты стоимости (в долларах) для четырех рабочих равны 2, 1, 2 и 8. Этот новый станок может заменить любой из четырех, если такая замена экономически оправдана. Сформули- руйте задачу как задачу о назначениях и найдите оптимальное реше- ние. Оправдана ли экономически замена одного из станков? Если да, то какого?

**Задание 3.26.** Решите задачу оптимального исследования рынка в четырех городах, если задана матрица успешных опросов:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Рынки | Города | | | |
| А | Б | В | Г |
| 1 | 8 | 12 | 10 | 2 |
| 2 | 4 | 7 | 9 | 10 |
| 3 | 6 | 5 | 3 | 11 |
| 4 | 1 | 3 | 2 | 4 |

**Задание 3.27.** Решите задачу оптимального исследования рынка в трех городах, если в каждом из городов предполагается проводить по 10 опросов. Матрица вероятностей успешных опросов:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Рынки | Города | | |
| А | Б | В |
| 1 | 0,3 | 0,2 | 0,2 |
| 2 | 0,1 | 0,4 | 0,1 |
| 3 | 0,2 | 0,5 | 0,1 |

**Задание 3.28.** Решить задачу оптимального использования трех торговых агентов в трех городах, если задана матрица покупательных способностей с *ij*, реализуемых *i*-м агентом в *j*-м городе.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Города | Агенты | | |
| А1 | А2 | А3 |
| С1 | 200 | 270 | 360 |
| С2 | 180 | 240 | 330 |
| С3 | 210 | 300 | 300 |

**Задание 3.29.** Компания разрабатывает план выпуска трех новых видов продукции и владеет 5 предприятиями, на трех из них должны производиться новые виды продукции – по одному виду на одно предприятие. При этом известны:

– издержки производства и сбыта единицы продукции, руб.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вид продукции | Предприятие | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 20 | 23 | 38 | 15 | 35 |
| 2 | 8 | 29 | 6 | 35 | 35 |
| 3 | 5 | 8 | 3 | 4 | 7 |

– издержки сбыта единицы продукции, руб.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вид продукции | Предприятие | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 20 | 50 | 20 | 10 | 13 |
| 2 | 7 | 90 | 8 | 35 | 60 |
| 3 | 5 | 5 | 4 | 15 | 6 |

* плановый объем годового производства, который позволил бы удовлетворить спрос и плановая стоимость единицы продукции каж- дого вида:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вид продукции | Плановый объем  производства | Плановая стоимость, руб. |
| 1 | 35 000 | 55 |
| 2 | 160 000 | 50 |
| 3 | 54 000 | 30 |

Рассчитайте оптимальный план производства на основе задачи о назначениях.

# Глава 4. МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задачи нелинейного программирования формулируются так же, как и общая задача оптимального программирования со следующими

требованиями к целевой функции и допустимой области: целевая

функция *f* *X*  *f* *x , x , ... , x*  или (и) хотя бы одна из функций

1 2 *n*

*g* *x* , *x* ... , *x*

, *i*  1, *m*

являются нелинейными.

*i* 1 2 *n*

У произвольной задачи нелинейного программирования некото- рые или все свойства ЗЛП отсутствуют. Вследствие этого задачи не- линейного программирования несравненно сложнее ЗЛП и для них не существует общего универсального метода решения (аналогичного симплексному методу).

# Задачи и методы динамического программирования

Весьма полезным вычислительным методом для решения неко- торых типов задач нелинейного программирования является метод *динамического программирования* (ДП). При решении задачи этим методом процесс решения расчленяется на этапы, решаемые последо- вательно во времени и приводящие в конечном счете к искомому ре- шению. Типичные особенности многоэтапных (многошаговых) задач, решаемых методом динамического программирования, состоят в сле- дующем:

* процесс перехода производственно-экономической системы из одного состояния в другое должен быть марковским (процессом с от- сутствием последействия). Это означает, что если система находится в

некотором состоянии *S n*  *S* , то дальнейшее развитие процесса зави-

*n*

сит только от данного состояния и не зависит от того, каким путем система приведена в это состояние;

* процесс длится определенное число шагов *N,* на каждом шаге

осуществляется выбор одного управления *un* , под воздействием кото-

рого система переходит из одного состояния *S n*

в другое

*S n*1 :

*S n un*

*S n*1 . Поскольку процесс марковский, то

*un*  *un* *S n* 

зависит толь-

ко от текущего состояния;

* каждый шаг (выбор очередного решения) связан с определен- ным эффектом, который зависит от текущего состояния и принятого

решения: *φ* *S n* , *un* ;

*n*

* общий эффект (доход) за *N* шагов слагается из доходов на от- дельных шагах, т. е. критерий оптимальности должен быть аддитив- ным (или приводящимся к нему).

Требуется найти такое решение *un* для каждого шага

*n*  1,2,3, ... , *N* , т. е. последовательность *u*1 , ... , *u N* , чтобы получить максимальный эффект (доход) за *N* шагов.

Любая возможная допустимая последовательность решений

*u*1 , ... , *u N*  называется *стратегией управления*. Стратегия управления,

доставляющая максимум критерию оптимальности, называется опти- мальной.

В основе общей концепции метода ДП лежит *принцип опти- мальности Беллмана*: оптимальная стратегия обладает таким свойст- вом, что независимо от того, каким образом система оказалась в рас- сматриваемом конкретном состоянии, последующие решения должны составлять оптимальную стратегию, привязывающуюся к этому со- стоянию. Математически этот принцип записывается в виде *рекур-*

*рентного соотношения ДП (РДП)*:

*f* *S n*   *max*

*n*

*n*

*S n ,un* 

*fn*1

*S n*1 *,un* 

*un*  *un* *S n* , *S*

*n*

 *Sn* ,

где

*f* *S n* 

* эффект за оставшиеся *n* шагов;

*un* *Sn* 

* все допустимые

управления при условии, что система находится в со-

*n*

стоянии *S n* ; *φ* *S n* , *un*  – эффект от принятия решения *un* .

*n*

Благодаря принципу оптимальности удается при последующих переходах испытывать не все возможные варианты, а лишь оптималь- ные выходы. РДП позволяет заменить трудоемкое вычисление опти- мума по *N* переменных в исходной задаче решением *N* задач, в каждой из которых оптимум находится лишь по одной переменной.

Существует очень много практически важных задач, которые ставятся и решаются как задачи ДП (задачи о замене оборудования, о ранце распределения ресурсов и т. д.).

# Сетевые графики динамических задач

*Сетевой моделью* (другие названия: *сетевой график, сеть)* назы- вается экономико-математическая модель, отражающая комплекс ра- бот (операций) и событий, связанных с реализацией некоторого про- екта (научно-исследовательского, производственного и др.), в их ло- гической и технологической последовательности и связи.

Анализ сетевой модели, представленной в графической или таб- личной (матричной) форме, позволяет, во-первых, более чётко вы- явить взаимосвязи этапов реализации проекта и, во-вторых, опреде- лить наиболее оптимальный порядок выполнения этих этапов в целях, например, сокращения сроков выполнения всего комплекса работ.

Таким образом, метод сетевого моделирования относится к мето- дам принятия оптимальных решений.

Математический аппарат сетевых моделей базируется на теории графов. *Графом* называется совокупность двух конечных множеств: множества точек, которые называются *вершинами,* и множества пар вершин, которые называются *ребрами.* Если рассматриваемые пары вершин являются упорядоченными, т. е. на каждом ребре задается на- правление, то граф называется *ориентированным;* в противном слу- чае – *неориентированным.* Последовательность неповторяющихся ребер, ведущая от некоторой вершины к другой, образует *путь.* Граф называется *связным,* если для любых двух его вершин существует путь, их соединяющий; в противном случае граф называется *несвяз- ным.* В экономике чаще всего используются два вида графов: дерево и сеть. *Дерево* представляет собой связный граф без циклов, имеющий исходную вершину *(корень)* и крайние вершины; пути от исходной вершины к крайним вершинам называются *ветвями. Сеть* – это ори- ентированный конечный связный граф, имеющий начальную верши-

ну *(источник)* и конечную вершину *(сток).* Таким образом, сетевая модель представляет собой граф вида «сеть».

В экономических исследованиях сетевые модели возникают при моделировании экономических процессов методами *сетевого плани- рования и управления* (СПУ). Объектом управления в системах сете- вого планирования и управления являются коллективы исполнителей, располагающих определенными ресурсами и выполняющих опреде- ленный комплекс операций, который призван обеспечить достижение намеченной цели, например разработку нового изделия, строительст- ва объекта и т.п.

Основой СПУ (*сетевого планирования и управления*) является се- тевая модель (СМ), в которой моделируется совокупность взаимосвя- занных работ и событий, отображающих процесс достижения опреде- ленной цели. Она может быть представлена в виде графика или таб- лицы.

Основные понятия СМ: событие, работа и путь. На рис. 4.1. гра- фически представлена СМ, состоящая из 11 событий и 16 работ, про- должительность выполнения которых указана над работами.

*Работа* характеризует материальное действие, требующее ис- пользования ресурсов, или логическое, требующее лишь взаимосвязи событий. При графическом представлении работа изображается стрелкой, которая соединяет два события. Она обозначается парой за-

ключенных в скобки чисел *i*, *j**,* где *i* – номер события, из которого

работа выходит, а *j* – номер события, в которое она входит. Работа не может начаться раньше, чем свершится событие, из которого она вы- ходит. Каждая работа имеет определенную продолжительность *t (i,j).* Например, запись *t* (2,5) = 4 означает, что работа (2,5) имеет продол- жительность 4 единицы. К работам относятся также процессы, кото- рые не требуют ни ресурсов, ни времени выполнения. Они заключа- ются в установлении логической взаимосвязи работ и показывают, что одна из них непосредственно зависит от другой. Такие работы на- зываются *фиктивными* и на графике изображаются пунктирными стрелками (см. работу (6,9) рис. 4.1).



3

1

7

5

8

6

3

4

1 6

2

4

5

9

10

9

11

3

6

3

4

7

9

5

4

0

6

Рис. 4.1. Сетевая модель

*Событиями* называются результаты выполнения одной или не- скольких работ. Они не имеют протяженности во времени. Событие свершается в тот момент, когда оканчивается последняя из работ, входящая в него. События обозначаются одним числом и при графи- ческом представлении СМ изображаются кружком (или иной геомет- рической фигурой), внутри которого проставляется его порядковый номер (i = 1, 2, ..., *N).* В СМ имеется начальное событие (с номером 1), из которого работы только выходят, и конечное событие (с номером *N),* в которое работы только входят.

*Путь* – это цепочка следующих друг за другом работ, соединяю- щих начальную и конечную вершины. Например, в приведенной вы- ше модели путями являются *L1 =* (1, 2, 3, 7, 10, 11), *L2 –* (1, 2, 4, 6, 11) и др. Продолжительность пути определяется суммой продолжитель- ностей составляющих его работ. Путь, имеющий максимальную дли-

ну, называют *критическим* и обозначают *LKP ,* а его продолжитель-

ность – 𝑡𝐾𝑃. Работы, принадлежащие критическому пути, называются критическими. Их несвоевременное выполнение ведет к срыву сроков всего комплекса работ.

СМ имеют ряд характеристик, которые позволяют определить степень напряженности выполнения отдельных работ, а также всего их комплекса и принять решение о перераспределении ресурсов.

Для событий рассчитывают три характеристики: ранний и позд- ний срок совершения события, а также его резерв.

*Ранний срок* 𝑡*р*(j) свершения события определяется величиной

наиболее длительного пути от исходного до рассматриваемого собы- тия, причем 𝑡*р*(1) = 0, a 𝑡*р*(𝑁) = 𝑡*кр*(𝐿):

*t*  *j*  *max**t*

*P*

*P*

*j*

*i*  *t**i, j**;*

*j*  2*,N* . (4.1)

Поздний срок свершения события характеризует самый поздний допустимый срок, к которому должно совершиться событие, не вызы- вая при этом срыва срока свершения конечного события:

*t* *i*  *m*in *t*

*П*

*П*

*i*

j *t**i*, *j*;

*j*  2, *N* 1. (4.2)

Этот показатель определяется «обратным ходом», начиная с за-

вершающего события, с учетом соотношения *tП* N  *t* *N* .

*P*

Все события, за исключением событий, принадлежащих критиче-

скому пути, имеют резерв *R**i*:

*R**i*  *t*

*П*

*P*

*i* *t*

*i*. (4.3)

Резерв показывает, на какой предельно допустимый срок можно задержать наступление этого события, не вызывая при этом увеличе- ние срока выполнения всего комплекса работ.

Для оптимизации сетевой модели, выражающейся в перераспре- делении ресурсов с ненапряжённых работ на критические для ускоре- ния их выполнения, необходимо как можно более точно оценить сте- пень трудности своевременного выполнения всех работ, а также «це- почек» пути. Более точным инструментом решения этой задачи по сравнению с полным резервом является коэффициент напряженности, который может быть вычислен одним из двух способов по приведен- ной ниже формуле:

𝐾*н*

(𝑖, j) =

𝑡(𝐿𝑚𝑎𝑥)−𝑡*кр′*

𝑡*кр*−𝑡*кр′* = 1 −

𝑅*п*(𝑖,j)

𝑡*кр*−𝑡*кр*

*′* , (4.4)

где 𝑡(𝐿𝑚𝑎𝑥) – продолжительность максимального пути, проходящего через работу (𝑖, j); 𝑅*п*(𝑖, j) – полный резерв времени,

𝑡*кр′* – продолжительность отрезка рассматриваемого пути, совпадающего с критическим путем.

Согласно вышесказанному, заполним табл. 4.1 по рис. 4.1. При-

чем вначале заполняем *tP* , а затем *tП* , с учетом того, что *tП* N  *t* *N* .

*P*

Таблица 4.1

Пример решения задачи сетевой модели

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер события | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| *tp* | 0 | 6 | 11 | 9 | 15 | 13 | 12 | 18 | 16 | 24 | 33 |
| *tп* | 0 | 6 | 17 | 9 | 15 | 21 | 18 | 20 | 21 | 24 | 33 |
| *R* | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 8 | 6 | 2 | 5 | 0 | 0 |
| 𝐾*н* (𝑖, j) |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Заполняем раннее время. При этом мы идем из более ранних со- бытий в более поздние (т.е. от меньших чисел к большим).

Событие 1. Из него всё начинается, продолжительность – 0.

Событие 2. В событие 2 можно попасть единственным путем – 6. Событие 3. В событие 3 можно попасть единственным путем –

6+5=11.

Событие 4. В событие 4 можно попасть единственным путем – 6+3=9.

Событие 5. В событие 5 можно попасть по пути 1-2-5, что соста- вит время t5=6+4=10. Либо по пути 1-2-4-5, что составит время t5=6+3+6=15. Берем наибольшее – 15.

Событие 6. В событие 6 можно попасть единственным путем – 6+3+4=13.

Событие 7. В событие 7 можно попасть единственным путем – 6+5+1=12.

Событие 8. В событие 8 можно попасть путем – 6+4+3=13 и пу- тём 6 + 3 + 6 + 3 = 18. Выбираем наибольшее – 18.

Событие 9. В событие 9 можно попасть единственным путем – 6+3+7=16.

Событие 10. В событие 10 можно попасть пятью путями: 1-2-3-7-10=18;

1-2-5-8-10=17;

1-2-4-5-10=24;

1-2-4-9-10=19;

1-2-5-10=19.

Выбираем наибольший *–* 24.

Событие 11. В событие 11 можно попасть из события 10, при этом время будет 24+9=33, и из события 6, при этом время будет 13+5=18. Выбираем наибольшее 33.

Далее заполняем позднее время – tn. При этом мы идем от боль- ших номеров к меньшим.

В графу 11 записываем значение 33, согласно tП(N) = tP(N).

Событие 10. Обратным ходом в него можно попасть только из события 11. Следовательно, tП(10)= tП(11)-9=33-9=24.

Событие 9. В событие 9 обратным ходом можно попасть только из события 10. Следовательно, tП(9)= tП(10)-3=24-3=21.

Событие 8. В событие 8 обратным ходом можно попасть только из события 10. Поэтому время 24-4=20.

Событие 7. В событие 7 обратным ходом можно попасть только из события 10. Поэтому время 24-6=18.

Событие 6. В событие 6 обратным ходом можно попасть из со- бытия 11 – tП(6)=33–5=28 или из события 9 – tП(6)= tП(9)–0=21. Те- перь выбираем наименьшее время – tП(6)=21.

Событие 5. В событие 5 обратным ходом можно попасть из со- бытия 10, время 24–9=15, и из события 8, время 20-3=17. Выбираем

меньшее – 15.

Событие 4. В событие 4 можно попасть из 5-го, 9-го и 6-го. При этом времена будут: 9, 14, 17. Выбираем наименьшее – 9.

Событие 3. В событие 3 обратным ходом можно попасть из события 7, время 18–1=17.

Событие 2. В событие 2 обратным ходом можно попасть из со- бытия 5 – время 15-4=11; из события 4 – время 9-3=6; из события 3 –

время 17–5=12. Выбираем наименьшее – 6.

Теперь заполним резерв времени – R = tn -tp .

Критические события это те – где резерв времени равен нулю R=0. В нашем случае это события 1-2-4-5-10-11. Следовательно, кри- тический путь проходит через критические события, поэтому крити- ческий путь 1-2-4-5-10-11. Его длина, т.е. критическое время – tKp=33.

Для критического пути (1,2), (2,4), (4,5), (5,10), (10,11) резерв времени = 0 и коэффициент напряженности, согласно формуле (4.4), КН =1. Для других работ подсчитаем. Выясним более подробно смысл величин 𝑡(𝐿𝑚𝑎𝑥) и 𝑡*кр′* на конкретном примере. Пусть нам надо опре- делить эти параметры для пути, содержащего работу (5,8). На рис. 4.2 показан критический путь, его длительность tKP = 33, наибольший

путь, содержащий работу (5,8), его длительность 𝑡(𝐿𝑚𝑎𝑥) = 6 + 3 +

+6 + 3 + 4 + 9 = 31. Длительность совпадающих участков красного и синего и есть 𝑡*кр′*, и она равна 𝑡*кр′* = 6 + 3 + 6 + 9 = 24. Следова- тельно, напряжённость работы (5,8) равна:

𝐾*н*

(𝑖, j) =

𝑡(𝐿𝑚𝑎𝑥)−𝑡*кр′*

𝑡*кр*−𝑡*кр′* = 𝐾*н*

(5,8) =

31−24

33−24

= 7 = 0,78.

9



3

1

7

5

3

8

6

4

1 6

2

4

5

9

10

9

11

3

6

3

4

7

9

5

4

0

6

Рис. 4.2. Сетевая модель

Аналогично можно посчитать, например, и напряжённость рабо- ты (4,9)

𝑡(𝐿𝑚𝑎𝑥) − 𝑡*кр′*

𝐾*н*(𝑖, j) =

𝑡*кр*

− 𝑡*кр*

*′* = 𝐾*н*(4,9) =

6 + 3 + 7 + 3 + 9 − (6 + 3 + 9)

= =

33 − (6 + 3 + 9)

28 − 18

33 − 18

10

= = 0,67.

15

Или (2,3):

𝑡(𝐿𝑚𝑎𝑥) − 𝑡*кр′*

𝐾*н*(𝑖, j) =

𝑡*кр*

− 𝑡*кр*

*′* = 𝐾*н*(2,3) =

6 + 5 + 1 + 6 + 9 − (6 + 9) 27 − 15 12

= 33 − (6 + 9) = 33 − 15 = 18 = 0,67.

Теперь мы можем заполнить строку 𝐾*н*(𝑖, j) таблицы 4.1. При этом КН удобно считать по формуле (4.4):

𝐾 (𝑖, j) = 1 − 𝑅*п*(𝑖, j) .

*н* 𝑡*кр* − 𝑡*кр′*

КН=1.

Ясно, что коэффициент напряженности, где R=0, будет равен

Далее точка 3. В эту точку работа может совершиться толь-

ко из точки 2. Поэтому для этой точки коэффициент напряжен- ности 𝐾*н*(2,3), для него длина совпадающего участка будет равна

𝑡*кр′* = 6 + 9 = 15. Тогда

6

𝐾*н*(2,3) = 1 − 33 − 15 = 0,67 .

Далее точка 6. В эту точку работа может совершиться только из точки 4. Поэтому для этой точки коэффициент напряженности

𝐾*н*(4,6), для него 𝑡*кр′* = 6 + 3 + 9 = 18, следовательно

8

𝐾*н*(4,6) = 1 − 33 − 18 = 0,47 .

Далее точка 7. В эту точку работа может совершиться только из точки 3. Поэтому для этой точки коэффициент напряженности

𝐾*н*(3,7), для него 𝑡*кр′* = 6 + 9 = 15, следовательно

6

𝐾*н*(3,7) = 1 − 33 − 15 = 0,67 .

Далее точка 8. В эту точку работа может совершиться только из точки 3. Поэтому для этой точки коэффициент напряженности

𝐾*н*(3,7), для него 𝑡*кр′* = 6 + 9 = 15, следовательно

6

𝐾*н*(3,7) = 1 − 33 − 15 = 0,67 .

И последняя точка 9. В эту точку работа может совершиться только из точки 4. Поэтому для этой точки коэффициент напряженно- сти 𝐾*н*(4,9), для него 𝑡*кр′* = 6 + 3 + 9 = 18, следовательно

5

𝐾*н*(3,7) = 1 − 33 − 18 = 0,67 .

Таким образом, табл. 4.1 примет окончательный вид:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер события | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| *tp* | 0 | 6 | 11 | 9 | 15 | 13 | 12 | 13 | 16 | 24 | 33 |
| *tп* | 0 | 6 | 17 | 9 | 15 | 21 | 18 | 20 | 21 | 24 | 33 |
| *R* | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 8 | 6 | 7 | 5 | 0 | 0 |
| КН | 1 | 1 | 0,67 | 1 | 1 | 0,47 | 0,67 | 0,67 | 0,67 | 1 | 1 |

На основании значения коэффициента КН все работы СМ могут быть разделены на три группы:

напряжённые 𝐾*н*(𝑖, j) > 0,8; подкритические 0,6 < 𝐾*н*(𝑖, j) > 0,8; резервные 𝐾*н*(𝑖, j) < 0,6.

В результате перераспределения ресурсов стараются максималь- но уменьшить общую продолжительность работ, что возможно при переводе всех работ в первую группу.

В нашем случае оптимизация СМ возможна в основном за счёт оптимизации резервной работы (4,6).

Отметим, что можно посчитать коэффициент напряженности и для всех других работ и принять более обоснованное решение.

Для всех работ (*i, j*) на основании ранних и поздних сроков свер- шения всех событий можно определить показатели:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ранний срок начала | 𝑡*рн*(𝑖, j) = 𝑡*р*(𝑖). | (4.5) |
| Ранний срок окончания | 𝑡*ро*(𝑖, j) = 𝑡*р*(𝑖) + 𝑡(𝑖, j). | (4.6) |
| Поздний срок окончания | 𝑡*по*(𝑖, j) = 𝑡*п*(𝑖). | (4.7) |
| Поздний срок начала  Полный резерв времени | 𝑡*пн*(𝑖, j) = 𝑡*п*(j) − 𝑡(𝑖, j). | (4.8) |
| 𝑅*п*(𝑖, j) = 𝑡*п*(j) − 𝑡*р*(𝑖) − 𝑡(𝑖, j) = | |  |
| 𝑡*пн*(𝑖, j) − 𝑡*р*(𝑖) = 𝑡*п*(j) − 𝑡*ро*(𝑖, j) . | | (4.9) |

Полный резерв времени показывает, насколько можно увели- чить время выполнения конкретной работы при условии, что срок выполнения всего комплекса не изменится.

Путь характеризуется двумя показателями – продолжительно- стью и резервом. Продолжительность пути определяется суммой про- должительностей составляющих его работ. Резерв определяется как разность между длинами критического и рассматриваемого путей. Из этого определения следует, что работы, лежащие на критическом пу- ти, и сам критический путь имеют нулевой резерв времени. Резерв времени пути показывает, насколько может увеличиться продолжи- тельность работ, составляющих данный путь, без изменения продол- жительности общего срока выполнения всех работ.

Табличная модель сетевого графика представлена в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Модель сетевого графика

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | (*i, j*) | *t(i,j)* | *tpн(i,j)=*  *=tp(i)* | *tро(i,j)=*  *tp(i)+ t(i,j)* | *tпн(i,j)* | *tпо(i,j)=*  *=tп(j)* | *Rп* | Кн |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5=4+3 | 6=7-3 | 7 | 8=6-4=7-5 | 9 |
| 1 | (1,2) | 6 | 0 | 6 | 0 | 6 | 0 | 1 |
| 2 | (2,3) | 5 | 6 | 11 | 12 | 17 | 6 | 0,67 |
| 3 | (2,4) | 3 | 6 | 9 | 6 | 9 | 0 | 1 |
| 4 | (2,5) | 4 | 6 | 10 | 11 | 15 | 5 | 0,44 |
| 5 | (3,7) | 1 | 11 | 12 | 17 | 18 | 6 | 0,67 |
| 6 | (4,5) | 6 | 9 | 15 | 9 | 15 | 0 | 1 |
| 7 | (4,6) | 4 | 9 | 13 | 17 | 21 | 8 | 0,47 |
| 8 | (4,9) | 7 | 9 | 16 | 14 | 21 | 5 | 0,67 |
| 9 | (5,8) | 3 | 15 | 18 | 17 | 20 | 2 | 0,78 |
| 10 | (5,10) | 9 | 15 | 24 | 15 | 24 | 0 | 1 |
| 11 | (6,9) | 0 | 13 | 13 | 21 | 21 | 8 | 0,38 |
| 12 | (6,11) | 5 | 13 | 18 | 28 | 33 | 15 | 0,38 |
| 13 | (7,10) | 6 | 12 | 18 | 18 | 24 | 6 | 0,67 |
| 14 | (8,10) | 4 | 18 | 22 | 20 | 24 | 2 | 0,78 |
| 15 | (9,10) | 3 | 16 | 19 | 21 | 24 | 5 | 0,67 |
| 16 | (10,11) | 9 | 24 | 33 | 24 | 33 | 0 | 1 |

Колонка 2 – всевозможные работы, исходя из рис. 4.1. Колонка 3 – их длительности, колонка 4 – заполняется так же, как в табл. 4.1, строка tp по первому событию (i), колонка 7 заполняется так же, как и строка tп в табл. 4.1 по второму событию (j). Заполнение колонок 5 и 6 показано в самой табл. 4.2. Колонка 8 есть разность колонок 6 и 4 ли- бо 7 и 5, согласно формуле (4.7).

## ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

**Задания 4.1 – 4.4.**

Рассчитать параметры сетевого графика. Выделить критический путь и найти его длину. Определить резервы времени каждого события.

Определить резервы времени всех работ и коэффициент напря- женности работы предпоследней работы.

**4.1.**

1

3

5

3

6

0

8

5

2

5

6

3

2

2

2

4

**4.2.**



1

15

2

7

10

12

3

5

8

7

10

0

5

9

6

9

9

5

2

9

4

8

4

3

5

8

9

6

**4.3.**



1

18

8

7

12

6

3

5

2

4

10

0

5

9

6

2

3 9

4

4

3

2

3

4

9

2

8

2

**4.4.**



0

5

5

4

2

4

8

1

3

6

10

7

4

2

4

9

9

5

5

4

9

2

6

6

8

8

* 1. Изобразите граф сетевой модели, заданной параметрами:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| (*i*, *j*) | 1, 2 | 1, 3 | 1, 4 | 2, 4 | 2, 5 | 2, 6 | 3, 4 | 3, 5 | 3, 8 | 4, 5 | 5, 7 | 6, 7 | 6, 8 | 7, 8 |
| *T* (*i*, *j*) | 3 | 4 | 1 | 4 | 5 | 4 | 1 | 5 | 6 | 4 | 4 | 3 | 2 | 2 |

* 1. Изобразите граф сетевой модели, заданной параметрами.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| (*i*, *j*) | 1, 2 | 2, 3 | 2, 4 | 2, 5 | 2, 7 | 3, 7 | 4, 5 | 5, 6 | 6, 7 | 6, 8 | 8, 9 | 7,9 |
| *T* (*i*, *j*) | 4 | 3 | 5 | 1 | 8 | 3 | 5 | 5 | 9 | 6 | 8 | 5 |

* 1. Изобразите граф сетевой модели, заданной параметрами.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| (*i*, *j*) | 1, 2 | 1, 3 | 2, 3 | 2, 4 | 3, 4 | 4, 5 | 4, 6 | 4, 7 | 5, 8 | 6, 9 | 7, 11 | 8, 10 | 9, 11 | 10,11 |
| *T* (*i*, *j*) | 6 | 7 | 8 | 9 | 5 | 4 | 6 | 5 | 6 | 7 | 9 | 3 | 5 | 7 |

**Задание 4.8.** Пусть для некоторого комплекса работ установлена оценка для каждой работы на уровне нормативных продолжительно- стей и срочного режима, а также дана стоимость. Информация пред- ставлена в таблице.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Работа | Нормативный режим | | Срочный режим | |
| Продолжительность,  дни | Стоимость,  руб. | Продолжитель-  ность, дни | Стоимость,  руб. |
| 1, 2 | 3 | 6 | 2 | 11 |
| 1, 3 | 5 | 8 | 3 | 12 |
| 1, 4 | 4 | 7 | 8 | 9 |
| 2, 5 | 10 | 25 | 8 | 30 |
| 3, 5 | 8 | 20 | 6 | 24 |
| 3, 6 | 15 | 26 | 12 | 30 |
| 4, 6 | 13 | 24 | 10 | 30 |
| 5, 7 | 3 | 15 | 6 | 25 |
| 6, 7 | 4 | 10 | 3 | 15 |

Построить график данного комплекса работ и рассчитать:

* + - временные характеристики сетевого графика при нормальном режиме работ; найти критический путь; полные резервы времени;
    - временные характеристики сетевого графика при срочном ре- жиме работ; найти критический путь; полные резервы времени; опре- делить стоимость работ.

**Задание 4.9.** Пусть для некоторого комплекса работ установлена оценка для каждой работы на уровне нормативных продолжительно- стей и срочного режима, а также дана стоимость. Информация пред- ставлена в таблице.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Работа | Нормативный режим | | Срочный режим | |
| Продолжительность,  дни | Стоимость,  руб. | Продолжительность,  дни | Стоимость,  руб. |
| 1, 2 | 5 | 3 | 4 | 5 |
| 1, 3 | 8 | 4 | 6 | 6 |
| 2, 4 | 6 | 9 | 4 | 6 |
| 2, 5 | 15 | 15 | 10 | 20 |
| 3, 5 | 8 | 12 | 6 | 8 |
| 4, 6 | 12 | 6 | 10 | 25 |
| 4, 7 | 10 | 12 | 7 | 8 |
| 5, 7 | 3 | 5 | 2 | 3 |
| 6, 7 | 4 | 10 | 3 | 8 |

Построить график данного комплекса работ и рассчитать:

* + - временные характеристики сетевого графика при нормальном режиме работ; найти критический путь; полные резервы времени;
    - временные характеристики сетевого графика при срочном ре- жиме работ; найти критический путь; полные резервы времени; опре- делить стоимость работ.

# Глава 5. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

При исследовании операций часто приходится сталкиваться с системами, предназначенными для многоразового использования при решении однотипных задач. Возникающие при этом процессы полу- чили название процессов обслуживания, а системы – систем массово- го обслуживания (СМО). Примерами таких систем являются теле- фонные системы, ремонтные мастерские, вычислительные комплек- сы, билетные кассы, магазины, парикмахерские и т. д.

Каждая СМО состоит из определенного числа обслуживающих единиц (приборов, устройств, пунктов, станций), которые называются каналами обслуживания. Каналами могут быть линии связи, рабочие точки, вычислительные машины, продавцы и др. По числу каналов СМО подразделяются на одноканальные и многоканальные.

Заявки поступают в СМО обычно нерегулярно, а случайно, об- разуя так называемый случайный поток заявок (требований). Обслу- живание заявок, вообще говоря, также продолжается какое-то слу- чайное время. Случайный характер потока заявок и времени обслу- живания приводит к тому, что СМО оказывается загруженной нерав- номерно: в какие-то периоды времени скапливается очень большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными), в другие же периоды СМО работает с недогрузкой или простаивает.

Предметом теории массового обслуживания является построе- ние математических моделей, связывающих заданные условия работы СМО (число каналов, их производительность, характер потока заявок и т. п.) с показателями эффективности СМО, описывающими ее спо- собность справляться с потоками заявок.

В качестве показателей эффективности СМО используют: сред- нее число заявок, обслуживаемых в единицу времени; среднее число заявок в очереди; среднее время ожидания обслуживания; вероят- ность отказа в обслуживании без ожидания; вероятность того, что число заявок в очереди превысит определенное значение и т. п.

СМО делятся на два основных типа (класса): СМО с отказами и СМО с ожиданием (очередью). В СМО с отказами заявка, поступив- шая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ, покидает СМО и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует (напри- мер, заявка на телефонный разговор в момент, когда все каналы заня- ты, покидает СМО не обслуженной). В СМО с ожиданием заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, не уходит, а стано- вится в очередь на обслуживание.

СМО с ожиданием подразделяются на разные виды в зависимо- сти от того, как организована очередь: с ограниченной или неограни- ченной длиной очереди, с ограниченным временем ожидания и т. п.

Для классификации СМО важное значение имеет дисциплина обслуживания, определяющая порядок выбора заявок из числа посту- пивших и порядок распределения их между свободными каналами. По этому признаку обслуживание заявок может быть организовано по принципу «первая пришла – первая обслужена» (такой порядок может применяться, например, при извлечении для обслуживания изделий со склада, ибо последние из них оказываются часто более доступны- ми) или обслуживание с приоритетом (когда в первую очередь об- служиваются наиболее важные заявки). Приоритет может быть как абсолютным, когда более важная заявка «вытесняет» из-под обслужи- вания обычную заявку (например, в случае аварийной ситуации пла- новые работы ремонтных бригад прерываются до ликвидации ава- рии), так и относительным, когда более важная заявка получает лишь

«лучшее» место в очереди.

Под потоком событий понимают последовательность однород- ных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные мо- менты времени (например, поток вызовов на телефонной станции, по- ток отказов ЭВМ, поток покупателей и т. п.).

Поток характеризуется интенсивностью  – частотой появления событий или средним числом событий, поступающих в СМО в еди- ницу времени.

Поток событий называется регулярным, если события следуют одно за другим через определенные равные промежутки времени. На- пример, поток изделий на конвейере сборочного цеха (с постоянной скоростью движения) является регулярным.

Поток событий называется стационарным, если его вероятност-

ные характеристики не зависят от времени. В частности, интенсив-

ность стационарного потока есть величина постоянная:

*t*    .

Например, поток автомобилей на городском проспекте является стационарным, но этот поток можно считать нестационарным в тече- ние суток.

Поток событий называется потоком без последействия, если для

любых двух непересекающихся участков времени

1 и

 2 число собы-

тий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попа- дающих на другие. Например, поток пассажиров, входящих в метро, практически не имеет последействия. А, скажем, поток покупателей, отходящих с покупками от прилавка, уже имеет последействие (хотя бы потому, что интервал времени между отдельными покупателями не может быть меньше, чем минимальное время обслуживания каж- дого из них).

Поток событий называется ординарным, если вероятность попа-

дания на малый (элементарный) участок времени *t* двух и более со-

бытий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события. Другими словами, поток событий ординарен, если события появляются в нем поодиночке, а не группами. Например, по- ток поездов, подходящих к станции, ординарен, а поток вагонов не- ординарен.

Поток событий называется простейшим (или стационарным пу- ассоновским), если он одновременно стационарен, ординарен и не имеет последействия. Название «простейший» объясняется тем, что СМО с простейшими потоками имеет наиболее простое математиче- ское описание.

Простейший поток в качестве предельного возникает в теории случайных процессов столь же естественно, как в теории вероятно-

стей нормальное распределение получается в качестве предельного для суммы случайных величин.

Рассмотрим на оси времени *Ot* (рис. 5.1) простейший поток со- бытий как неограниченную последовательность случайных точек. Показано, что для простейшего потока число *m* событий (точек), по- падающих на произвольный участок времени  , распределено по за- кону Пуассона:

  *m*



*Pm*   *m! e*

, (5.1)

для которого математическое ожидание *а* случайной величины равно

ее дисперсии

*D*  2 :

*а*  2

  .

T τ



O

t

Рис. 5.1. Ось времени с простейшим потоком событий

В частности, вероятность того, что за время  не произойдет ни одного события ( *т*  0 ), равна

*P*   *e*

0

. (5.2)

Найдем распределение интервала времени *Т* между двумя про- извольными соседними событиями простейшего потока. В соответст- вии с (5.2) вероятность того, что на участке времени длиной *t* не поя-

вится ни одного из последующих событий, составляет:

*P**T*  *t*   *e**t*

, (5.3)

а вероятность противоположного события, т. е. функция распределе- ния случайной величины *Т* , есть

*F* *T*  1  *P**T*  *t*  1  *e**t* . (5.4)

Плотность вероятности случайной величины есть производная ее функции распределения, т. е. (рис. 5.2):

*t*   *F'* *t*   *e**t* . (5.5)

t

(t)

Рис. 5.2. График плотности вероятности

Распределение, задаваемое плотностью вероятности (5.5) или функцией распределения (5.4), называется показательным или экспо- ненциальным. Таким образом, интервал времени между двумя сосед- ними произвольными событиями имеет показательное распределение, для которого математическое ожидание равно среднему квадратиче- скому отклонению случайной величины:

*а*    1



и обратно по величине интенсивности потока.

(5.6)

Важнейшее свойство показательного распределения (присущее только показательному распределению) состоит в следующем: если промежуток времени, распределенный по показательному закону, уже длился некоторое время  , то это никак не влияет на закон распреде-

ления оставшейся части промежутка *Т*  : он будет таким же, как и

закон распределения всего промежутка *Т* .

Другими словами, для интервала времени *Т* между двумя по- следовательными соседними событиями потока, имеющего показа- тельное распределение, любые сведения о том, сколько времени длился этот интервал, не влияют на закон распределения оставшейся части. Это свойство показательного закона распределения представ- ляет собой, в сущности, другую формулировку «для отсутствия по- следействия» – основного свойства простейшего потока.

Для простейшего потока с интенсивностью  вероятность попа-

дания на элементарный (малый) отрезок времени *t*

события потока равна, согласно (5.4),

хотя бы одного

*P**t*

 *P**T*  *t*   1  *e**t*

 *t* . (5.7)

# Системы массового обслуживания с отказами

В качестве показателей эффективности СМО с отказами будем рассматривать такие:

*А* – абсолютную пропускную способность СМО, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;

*Q* – относительную пропускную способность, т. е. среднюю до- лю пришедших заявок, обслуживаемых системой;

*РОТК*

– вероятность отказа, т. е. того, что заявка покинет СМО

необслуженной;

*k* – среднее число занятых каналов (для многоканальной системы).

### Одноканальная система с отказами

*Рассмотрим задачу*. Имеется один канал, на который поступает поток заявок с интенсивностью  . Поток обслуживания имеет интен- сивность . При этом мы полагаем, что все потоки событий, перево- дящие СМО из одного состояния в другое, являются простейшими. К ним относится и поток обслуживания – поток заявок, обслуживаемых

одним непрерывно занятым каналом. Среднее время обслуживания *t об*

обратно по величине интенсивности , т. е.

*t об*

 1  . Найти предель-

ные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

Система *S* (СМО) имеет два состояния: *S*0 – канал свободен, *S*1

– канал занят. Граф состояния представлен на рис. 5.3.

λ

S1

µ

S0

Рис. 5.3. Граф состояния одноканальной СМО

В предельном, стационарном режиме система алгебраических уравнений для вероятностей состояний имеет вид:

  *р*0    *р*1 ,

(5.8)

  *р*    *р* ,

 1 0

т. е. система вырождается в одно уравнение. Учитывая нормировоч-

ное условие

*р*0  *р*1  1, найдем предельные вероятности состояний:

*р*   *,*

0   

*р*   , (5.9)

1   

которые выражают среднее относительное время пребывания систе-

мы в состоянии *S*0

(когда канал свободен) и

*S*1 (когда канал занят), т.

е. определяют соответственно относительную пропускную способ-

ность *Q* системы и вероятность отказа

*РОТК* :

*Q*  

  

, (5.10)

*РОТК*

  . (5.11)

  

Абсолютную пропускную способность найдем, умножив отно- сительную пропускную способность *Q* на интенсивность потока от- казов:

*А*  

  

. (5.12)

**Пример 5.1.** Известно, что заявки на телефонные переговоры

поступают с интенсивностью *λ*  90 *заявок* / *час* , а средняя продолжи-

тельность разговора по телефону

*tоб*  2 *мин*.

Определить показатели

эффективности СМО при наличии одного номера.

Решение. Интенсивность потока обслуживания будет равна

*μ*  1/ *t об* или *μ*  1/ 2 *мин*1   30 *час*1 . Согласно (5.10),

*Q*  30 /90  30  0,25, т. е. в среднем только

25*%*

поступающих зая-

вок осуществят переговоры по телефону. Соответственно, вероят- ность отказа в обслуживании составит, согласно (5.11),

*РОТК*

 90 /90  30  0,75 . Абсолютная пропускная способность СМО

*А*  90  30 /90  30  22,5 , т. е. в среднем в час будут обслужены

22,5

заявки на переговоры. Очевидно, что при наличии только одного те- лефонного номера СМО будет плохо справляться с потоком заявок.

### Многоканальная система с отказами

Рассмотрим классическую задачу Эрланга. Имеется *n* каналов, на которые поступает поток заявок с интенсивностью *λ* . Поток об- служиваний имеет интенсивность . Найти предельные вероятности состояния системы и показатели ее эффективности.

Система *S* (СМО) имеет следующие состояния (нумеруем их по

числу заявок, находящихся в системе):

*S*0 ,

*S*1 ,

*S*2 , ...,

*Sk* , ...,

*Sn* , где *Sk*

– состояние системы, когда в ней находится *k* заявок, т. е. занято *k*

каналов.

Граф состояний СМО показан на рис. 5.4.

λ λ λ

S0

S2

S1

... λ λ

...

Sk

... λ

...

Sn

µ 2µ 3µ kµ (k+1)µ nµ

Рис. 5.4. Граф состояний многоканальной СМО

Поток заявок последовательно переводит систему из любого ле- вого состояния в правое соседнее состояние с одной и той же интен- сивностью *λ* . Интенсивность же потока обслуживаний, переводящих систему из любого правого состояния в левое соседнее состояние, по- стоянно меняется. Действительно, если СМО находится в состоянии

*S*2 (два канала заняты), то она может перейти в состояние *S*1 (один

канал занят), когда закончит обслуживать либо первый, либо второй канал, т. е. суммарная интенсивность их потоков обслуживания будет 2 . Аналогично, суммарный поток обслуживаний, переводящих

СМО из состояния *S*3

(три канала заняты) в

*S*2 , будет иметь интен-

сивность 3*μ* , т. е. может освободиться любой из трех каналов, и т. д.

Для предельной вероятности получим

 *λ λ*2 *λk*

*λn* 1

*р*0  1 *μ*  2!*μ* 2



 ...

*k*!*μk*

 ...  

*n*!*μn* 

. (5.13)

Величина

*ρ*  *λ*

*μ*

(5.14)

называется приведенной интенсивностью потока заявок или интен- сивностью нагрузки канала. Она выражает среднее число заявок, при- ходящееся на среднее время обслуживания одной заявки. Теперь можно записать:

 *ρ* 2

*ρk ρn* 1

*p*0  1 *ρ* 



*ρ* 2

 ... 

2! *k*!

*ρ k*

 ... 



*n*! 

, (5.15)

*ρ n*

*р*  *ρ*  *р* ,

1 0

*р*2 

2! *р*0 , ...

*рk* 

*k*! *p*0 , ...

*pn* 

*n*! *p*0 . (5.16)

Эти формулы для предельных вероятностей получили название формул Эрланга – в честь основателя теории массового обслужива- ния.

Вероятность отказа СМО есть предельная вероятность того, что все каналы будут заняты, т. е.

*РОТК*

*ρ n*

 *n*! *p*0 . (5.17)

Относительная пропускная способность – вероятность того, что заявка будет обслужена:

*n*

*Q*  1  *POTK*  1  *n!*

*p*0 . (5.18)

Абсолютная пропускная способность:

*А*  *λ* 

 *λ*    *ρ n*

 . (5.19)

*Q* 1



*p*0 

*n*! 

Среднее число занятых каналов *k* есть математическое ожида- ние числа занятых каналов:

*n*

*k*   *k*  *pk* .

*k* 0

Однако среднее число занятых каналов можно найти проще, ес- ли учесть, что абсолютная пропускная способность системы *А* есть не что иное, как интенсивность потока обслуженных системой заявок (в единицу времени). Так как каждый занятый канал обслуживает в среднем заявок (в единицу времени), то среднее число занятых ка- налов

*k*  *A* . (5.20)

*μ*

Или, учитывая (5.19), (5.14):

*k*    

1



 *n*

*n!*

*p*  . (5.21)



0 

**Пример 5.2.** По условию предыдущей задачи определить опти- мальное число телефонных номеров, если условием оптимальности считать удовлетворение в среднем 90 заявок из 100.

Решение. Интенсивность нагрузки канала, согласно (5.14),

*ρ*  90 / 30  3, т. е. за время среднего (по продолжительности) теле-

фонного разговора

*tоб*  2

*мин* поступает в среднем 3 заявки на пере-

говоры. Будем постепенно увеличивать число каналов и определять

характеристики обслуживания. Так, при *n*  2 , согласно (5.15),

*р*  1  3  32 / 2!1  0,118  0,12 .

0

Согласно (5.18), *Q*  1  32 / 2! 0,118  0,471  0,47 ; согласно

(5.19),

*А*  90  0,471  42,4

и т. д. Значение характеристик СМО сведем

в таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Характеристика обслуживания | Число каналов (телефонных номеров) | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Относительная пропускная способность *Q* | 0,25 | 0,47 | 0,65 | 0,79 | 0,90 | 0,95 |
| Абсолютная пропускная способность *А* | 22,5 | 42,4 | 58,8 | 71,5 | 80,1 | 85,3 |

По условию оптимальности *Q*  0,9 , следовательно, необходимо

установить пять телефонных номеров. При этом в час будет обслужи- ваться в среднем 80 заявок *А*  80,1, а среднее число занятых теле-

фонных номеров (каналов) будет равно *k*  *А* / *μ*  80,1/ 30  2,67 .

# Системы массового обслуживания с неограниченной очередью

Рассмотрим вначале одноканальную систему с неограниченной очередью. Имеется одноканальная СМО с очередью, на которую не наложены никакие ограничения (ни по длине очереди, ни по времени ожидания). Поток заявок, поступающих в СМО, имеет интенсивность *λ* , а поток обслуживаний – интенсивность . Необходимо найти пре- дельные вероятности состояний и показатели эффективности СМО.

Система может находиться в одном из состояний:

*S*0 ,

*S*1 ,

*S*2 , ...,

*Sk* , по числу заявок, находящихся в СМО: *S*0 – канал свободен;

*S*1 – канал занят (обслуживает заявку), очереди нет; *S*2 – канал занят,

одна заявка стоит в очереди; ... *Sk*

реди и т. д.

– канал занят, *k*  1

заявок в оче-

Граф состояний СМО представлен на рис. 5.5.

λ λ λ

S1

S0

S2

... λ λ

...

Sk

...

...

µ µ µ µ µ

Рис. 5.5. Граф состояний одноканальной СМО с неограниченной очередью

Доказано, что если *ρ*  1, т. е. среднее число приходящих заявок

меньше среднего числа обслуженных заявок (в единицу времени), то

предельные вероятности существуют. Если бесконечности.

*ρ*  1, то очередь растет до

Для определения предельных вероятностей состояния системы будем иметь:

 *λ*  *λ* 2

 *λ* *k*

1

*р*  1      ...    ... 

*μ*





 1  *ρ*  *ρ* 2  ...  *ρ k*  ... 1 . (5.22)

0   *μ*   *μ*  

Поскольку предельные вероятности существуют лишь при *ρ*  1,

то геометрический ряд со знаменателем

*ρ*  1

сходится к сумме, рав-

ной

1 . Поэтому

1  *ρ*

Соответственно,

0

*р*  1 *ρ*

. (5.23)

*р*  *ρр*  *ρ*1 *ρ* ;

;

0

1

0

2

*р*  *ρ* 2 *р*  *ρ* 2 1 *ρ* ;

(5.24)

*р*  *ρ* 3 *р*

0

3

 *ρ* 3 1 *ρ* ;

..... *р*  *ρk р*

 *ρk* 1 *ρ*  .

Предельные вероятности

*k*

0

*р*0 ,

*р*1 ,

*р*2 , ...

*рk* , ... образуют убываю-

щую геометрическую прогрессию со знаменателем *ρ*  1, следова-

тельно, вероятность *р*0 – наибольшая. Это означает, что если СМО

справляется с потоком заявок (при дет отсутствие заявок в системе.

*ρ*  1), то наиболее вероятным бу-

Среднее число заявок в системе математического ожидания:

*Lсист*.

определяется по формуле

*Lсист*.

  *k*  *pk*

*k* 1



 1  *ρ*  *k*  *ρ k*

*k* 1



(5.25)

(суммирование от 1, так как нулевой член

*р*0  0 ). Можно показать,

что эта формула при *ρ*  1 преобразуется к виду:

*Lсист*.

  *ρ* . (5.26)

1  *ρ*

Найдем среднее число заявок в очереди *Lоч* . Очевидно, что

где

*Lоб*

*Lоч*  *Lсист*.  *Lоб* , (5.27)

– среднее число заявок, находящихся под обслуживанием.

Среднее число заявок под обслуживанием определим как веро- ятность того, что канал занят:

*Lоб*

 *Рзан*  1  *р*0  *ρ* , (5.28)

где использована формула (5.23). Отсюда получим:

*ρ ρ* 2

*Lоч*  *Lсист*.  *Lоб*

  *ρ*  . (5.29)

1  *ρ* 1 *ρ*

Доказано, что при любом характере потока заявок, при любом распределении времени обслуживания, при любой дисциплине об- служивания среднее время пребывания заявки в системе (очереди) равно среднему числу заявок в системе (в очереди), деленному на ин- тенсивность потока заявок.

*Т*  1 *L*

, (5.30)

*сист λ сист*

*Т*  1 *L*

*оч λ оч*

. (5.31)

Формулы (5.30), (5.31) называются формулами Литтла. Они вы- текают из того, что в предельном стационарном режиме среднее чис- ло прибывающих в систему заявок, равно среднему числу заявок, по- кидающих ее: оба потока заявок имеют одну и ту же интенсивность *λ*

.

На основании формул (5.30) и (5.31), с учетом (5.26) и (5.29) среднее время пребывания заявки в системе определится как

*Тсист*

  *ρ* , (5.32)

*λ*1  *ρ* 

а среднее время пребывания заявки в очереди –

*ρ* 2

*Точ*  *λ*1 *ρ*  . (5.33)

**Пример 5.3**. В порту имеется один причал для разгрузки судов. Интенсивность потока судов равна 0,4 судна в сутки. Среднее время разгрузки одного судна составляет 2 суток. Предполагается, что оче- редь может быть неограниченной длины. Найти показатели работы эффективности причала, а также вероятность того, что ожидают раз- грузку не более чем 2 судна.

Решение. Имеем

*ρ*  *λ* / *μ*  *λtоб*

 0,4  2  0,8 . Так как

*ρ*  0,8  1,

то очередь на разгрузку не может бесконечно возрастать и предель- ные вероятности существуют. Найдем их.

Вероятность того, что причал свободен, согласно (5.2), равна –

*р*0 1 0,8  0,2, а вероятность того, что занят – *Рзан*  1 *р*0  1 0,2  0,8 .

Согласно (5.24), вероятности того, что у причала находится 1, 2, 3 судна (т. е. ожидают разгрузки 0, 1, 2 судна), равны:

*р*  0,81 0,8  0,16; *р*  0,82 1  0,8  0,128; *р*  0,83 1  0,8  0,1024 .

1

2

3

Вероятность того, что ожидают разгрузку не более чем 2 судна, составляет:

*Р*  *р*1  *р*2  *р*3  0,16  0,128  0,1024  0,3904.

Среднее число судов, ожидающих разгрузку, согласно (5.27), равно:

*Lоч*

 0,82 /1  0,8  3,2 ,

а среднее время ожидания разгрузки

*Точ*  3,2 / 0,8  4 *суток*.

Среднее число судов, находящихся у причала

*Lсист*

 0,8 /1  0,8  4, а среднее время пребывания судна у причала

*Тсист*  4 / 0,8  5 .

Очевидно, что эффективность разгрузки судов невысокая. Для ее повышения необходимо уменьшить среднее время разгрузки судна

*tоб*

либо увеличить число причалов.

Рассмотрим теперь многоканальную СМО с неограниченной

очередью.

Имеется *n* каналов с неограниченной очередью. Поток заявок, поступающих в СМО, имеет интенсивность *λ* , а поток обслужива- ний – . Необходимо найти предельные вероятности состояния СМО и показатели ее эффективности.

Система может находиться в одном из состояний

*S*0 ,

*S*1 ,

*S*2 , ...,

*Sk* , ..., *Sn* , нумеруемых по числу заявок, находящихся в СМО: *S*0 – в

системе нет заявок (все каналы свободны); *S*1 – занят один канал, ос-

тальные свободны; *S*2 – заняты два канала, остальные свободны; ... ,

*Sk* – занято *k* каналов, остальные свободны; .., *Sn* – заняты все *n* ка-

налов (очереди нет);

*Sn*1

* заняты все *n* каналов, в очереди одна заяв-

ка; ...,

*Sn**r*

* заняты все *n* каналов, *r* заявок стоят в очереди.

Граф состояний системы показан на рис. 5.6. В отличие от пре- дыдущей СМО, интенсивность потока обслуживаний (переводящих систему из одного состояния в другое справа налево) не остается по- стоянной. По мере увеличения числа заявок в СМО от 0 до *n* она

увеличивается от величины до величины

*n*, так как соответствен-

но увеличивается число каналов обслуживания. При числе заявок в СМО большем, чем *n* , интенсивность потока обслуживаний сохраня- ется равной *n* .

Можно показать, аналогично предыдущему, что при предельные вероятности существуют.

*ρ* / *n*  1

λ λ λ

S0

S2

S1

µ 2µ 3µ

...

...

...

...

λ

λ

Sk

kµ

(k+1)µ

...

...

λ

nµ

Sn

Sn+ 1

λ

nµ

λ ...

...

nµ

λ

nµ

Sn+r

λ ...

...

nµ

Если

Рис. 5.6. Граф состояний многоканальной СМО с неограниченной очередью

*ρ* / *n*  1, то очередь растет до бесконечности. Можно полу-

чить следующие формулы для предельных вероятностей состояний *n*

– канальной СМО с неограниченной очередью:

 

 *ρ ρ* 2

*ρn ρn*1

1

*р*  1  

0  1!

*ρ*

 ... 

2! *n*!

*ρ k*

*n*!*n*  *ρ* 

*ρ n*

. (5.34)

*р*1  1! *р*0 , ... , *рk* 

*ρ n*1

*k*! *p*0 , ... , *pn* 

*ρ n**r*

*n*! *p*0 . (5.35)

*pn*1  *n*  *n*! *p*0 , ... , *pn**r*

 *nr*  *n*! *p*0 , ... .

(5.36)

Вероятность того, что заявка окажется в очереди:

*ρn*1

*Роч*  *n*!*n*  *ρ*  *p*0 . (5.37)

Для *n* -канальной СМО с неограниченной очередью, используя прежние приемы, можно найти:

среднее число занятых каналов

*k*  *λ*  *ρ* , (5.38)

*μ*

среднее число заявок в очереди

*ρ n*1 *p*

*L*  0 , (5.39)

*оч*



*n*  *n*! 1 





*ρ* 2



*n*



среднее число заявок в системе

*Lсист*  *Lоч*   . (5.40)

Среднее время пребывания заявки в очереди и среднее время пребывания заявки в системе, как и ранее, находятся по формулам Литтла (5.30) и (5.31).

Для СМО с неограниченной очередью при

*ρ*  1

любая заявка,

пришедшая в систему, будет обслужена, т. е. вероятность отказа

*РОТК*

 0, относительная пропускная способность

*Q*  1, а абсолютная

пропускная способность равна интенсивности входящего потока зая-

вок, т. е. *А*  *λ* .

**Пример 5.4.** В универсаме к кассе поступает поток покупателей

с интенсивностью *λ*  81 *чел* / *час* . Средняя продолжительность обслу-

живания контролером-кассиром одного покупателя делить:

*tоб*

 2 *мин*. Опре-

1. минимальное количество контролеров-кассиров *n*min , при ко-

тором очередь не будет расти до бесконечности, и соответствующие

характеристики обслуживания при

*n*  *n*min ;

1. оптимальное количество *nопт* , при котором относительная ве-

личина затрат *СОТН* , связанная с издержками на содержание каналов

обслуживания и с пребыванием в очереди покупателей, задаваемая,

например, как

*СОТН*

 1 *п*  3*Т*

*λ ОЧ*

, будет минимальна, и сравнить харак-

теристики обслуживания при *п*  *п*min и *п*  *пОПТ* .

Решение. 1) По условию задачи

*λ*  81*ч*1   81/ 60  1,35 *мин*1 .

Отсюда, согласно (5.38),

*ρ*  *λ* / *μ*  *λ*  *t об*

 1,35  2  2,7 . Очередь не бу-

дет возрастать до бесконечности при условии *ρ* / *п*  1, т. е. при

*п*  *ρ*  2,7 . Таким образом, минимальное количество контролеров-

кассиров

*n*min  3.

Найдем характеристики обслуживания СМО при *п*  3.

Вероятность того, что в узле расчета отсутствуют покупатели, равна (см. формулу (5.34)):

 

 2,72

2,73

2,74

1

*р*0  1 2,7 





2! 3!

3!3  2,7

 0,025,

т. е. в среднем 2,5% времени контролеры-кассиры будут простаивать.

Вероятность того, что в узле расчета будет очередь (см. форму- лу (5.37)), равна:

*Р*  

 

2,74    .

*ОЧ* 3!3  2,7

0,025

0,735

 

Среднее число покупателей, находящихся в очереди (см. фор- мулу (5.39)):

 

 

 2,74 

*LОЧ*    2,7 2   0,025  7,35.

 3  3!1   

3

   

Среднее время ожидания в очереди (см. формулу (5.31)):

*ТОЧ*

 7,35 /1,35  5,44 *мин* .

Среднее число покупателей на узле расчета (см. формулу (5.40)):

*LСИСТ*

 7,35  2,7  10,05 .

Среднее время нахождения покупателей в узле расчета (см. формулу 5.30):

*ТСИСТ*

 10,05 /1,35  7, 44 *мин* .

Среднее число контролеров-кассиров, занятых обслуживанием

покупателей

*k*  2,7

(см. формулу (5.38)). Коэффициент (доля) заня-

тых обслуживанием контролеров-кассиров *ρ* / *п*  0,9 . Абсолютная

пропускная способность узла расчета 81 покупатель в час.

Анализ характеристик обслуживания свидетельствует о значи- тельной перегрузке узла расчета при наличии трех контролеров- кассиров.

2) Относительная величина затрат при *п*  3.

*СОТН*

 1 *п*  3*Т*

*λ ОЧ*

 3 /1,35  3  5,44  18,54 .

Рассчитаем относительную величину затрат при других значе- ниях *п* .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Характеристика обслуживания | Число контролеров-кассиров | | | | |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Вероятность простоя контролеров-кассиров *р*0 | 0,025 | 0,057 | 0,065 | 0,067 | 0,067 |
| Среднее число покупателей в очереди *ТОЧ* | 5,44 | 0,60 | 0,15 | 0,03 | 0,01 |
| Относительная величина затрат *СОТН* | 18,54 | 4,77 | 4,14 | 4,53 | 5,22 |

Как видно из таблицы, минимальные затраты получены при

*п*  *пОПТ*  5 контролерах-кассирах.

Определим характеристики обслуживания узла расчета при

*п*  *пОПТ*

 5. Получим

*РОЧ*

 0,091;

*LОЧ*

 0,198;

*ТОЧ*

 *о*,146 *мин* ;

*LСИСТ*

 2,90 ; *ТСИСТ*

 2,15 *мин* ;

*k*  2,7 ;

*kЗ*  0,54.

Как видно, при

*п*  *пОПТ*

 5, по сравнению с

*п*  3, существенно

уменьшились вероятность возникновения очереди *п*  3, длина очере-

ди *LОЧ*

и среднее время пребывания в очереди

*ТОЧ* . Соответственно,

среднее число покупателей

*LСИСТ*

и среднее время нахождения в узле

расчета *ТСИСТ* , а также доля занятых обслуживанием контролеров-

кассиров *kЗ* . Но среднее число занятых обслуживанием контролеров-

кассиров *k* и абсолютная пропускная способность узла расчета *А* , ес- тественно, не изменились.

# Системы массового обслуживания с ограниченной очередью

СМО с ограниченной очередью отличаются от рассмотренных выше задач лишь тем, что число заявок в очереди ограничено (не мо- жет превосходить некоторого заданного *т* ). Если новая заявка при- ходит в момент, когда все места в очереди заняты, она покидает СМО необслуженной, т. е. получает отказ.

Очевидно, что для вычисления предельных вероятностей со- стояний и показателей эффективности таких СМО может быть ис- пользован тот же подход, что и выше. При этом суммировать надо не бесконечную прогрессию, а конечную. Соответствующие формулы сведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Формулы для решения задач по СМО

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Показатель | СМО с ограниченной очередью | |
| одноканальная | многоканальная |
| 1 | 2 | 3 |
| Предельная вероятность | *р*  1 *ρ*  0 1 *ρт*2  *р*  *р , р*  2 *р ,...,*  1 0 2 0  *р*  *к р*  *к* 0 |  *ρ ρ п ρ п*1 1  *ρ* / *п**т* 1  *р*0  1  ...   ...   ,   1! *п*! *п*  *п*!1 *ρ* / *п*   *ρ ρ к ρ п*  *р*  *р* ,..., *р*  *р* ,..., *р*  *р* ,  1 1! 0 *к к*! 0 *п п*! 0  *ρ п*1 *ρ n**r*  *р*  *р* ,..., *р*  *p* *r*  1, ... , *m*  *п*1 *п*  *п*! 0 *n**r nr*  *n*! 0 |

Окончание табл. 5.1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 |
| Вероятность  отказа | *Р*  *Р*  *ρ т*1 *р ОТК т*1 0 | *ρ п* *т*  *Р*  *Р*  *р*  *ОТК п**т пт*  *п*! 0 |
| Абсолютная про- пускная способ-  ность | *А*  *λQ*  *λ*1  *ρ m*1 *p*   0 |  *ρ n* *m*   *А*  *λQ*  *λ*1  *nm*  *n*! *p*0     |
| Относительная  пропускная спо- собность | *Q*  1  *P*  1 *ρ т*1 *р*  *ОТК* 0 | *ρ n* *m*  *Q*  1 *P*  1 *p*  *OTK nm*  *n*! 0 |
| Среднее число заявок в очереди | 1 *ρ m* *m* 1  *mρ*  *L*  *ρ* 2     *ОЧ* 1  *ρ m*2 1  *ρ* |   *ρ*  *ρ* *m*  *ρ n*1 *p* 1   *m*  1 *m*    0   *n*  *n*    *L*     *ОЧ* 2  *n*  *n*   *ρ*   !1    *n*  |
| Среднее число заявок под обслу-  живанием | *LОБ*  1 *p*0 |  *ρ n* *m*   *k*  *ρ*1 *p*    *nm*  *n*! 0  |
| Среднее число  заявок в системе | *LСИСТ*  *LОЧ*  *LОБ* | *LСИСТ*  *LОЧ*  *k* |

Среднее время пребывания заявки в очереди и в системе опре- деляется по формулам Литтла (5.30) и (5.31).

На практике часто встречаются СМО с так называемыми нетер- пеливыми заявками. Такие заявки могут уйти из очереди, если время ожидания превышает некоторую величину. В частности, такого рода заявки возникают в различных технологических системах, в которых задержка с началом обслуживания может привести к потере качества продукции, в системах оперативного управления, когда срочные со- общения теряют ценность (или даже смысл), если они не поступают на обслуживание в течение определенного времени.

## ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

**Задание 5.1.** На вход двухканальной СМО с отказами поступает поток заявок с интенсивностью λ = 12 заявок в час. Время обслужива- ния заявки одним каналом tобсл = 15 мин.

Найти абсолютную пропускную способность СМО с отказами.

**Задание 5.2.** На вход пятиканальной СМО с отказами поступает поток заявок с интенсивностью λ = 60 заявок в час. Время обслужива- ния заявки одним каналом tобсл = 1 мин.

Найти среднее число занятых каналов системы.

**Задание 5.3.** Станция «железная дорога» в мегаполисе принима- ет составы для разгрузки угля на n = 5 платформах. В среднем за су- тки на станцию прибывают 16 составов с углем. Поступление носит случайный характер. Плотность прихода составов показала, что по- ступление на разгрузку удовлетворяет пуассоновскому потоку с па- раметром α = 2/3 состава в час. Время разгрузки состава является слу- чайной величиной, удовлетворяющей экспоненциальному закону со средним временем разгрузки tср = 6 ч. Простой состава в сутки со- ставляет qож = 100 у. е; простой платформы в сутки за опоздание при- хода состава – qпр = 1000 у. е; стоимость эксплуатации платформы в сутки – q3 = 1000 у. е. Рассчитать издержки за сутки. Требуется про- вести анализ эффективности функционирования станции исходя из того, что работа станции представляет собой СМО с неограниченной очередью.

**Задание 5.4.** Интернет-провайдер в небольшом городе имеет 5 выделенных каналов обслуживания. В среднем на обслуживание од- ного клиента уходит 25 мин. В систему в среднем поступает 6 заказов в час. Если свободных каналов нет, следует отказ. Определить харак- теристики обслуживания: вероятность отказа, среднее число занятых обслуживанием линий связи, абсолютную и относительную пропуск- ные способности, вероятность обслуживания. Найти число выделен-

ных каналов, при котором относительная пропускная способность системы будет не менее 0,95. Считать, что потоки заявок и обслужи- ваний простейшие.

**Задание 5.5.** Порт имеет один причал для разгрузки судов. Ин- тенсивность потока 0,4 в сутки, среднее время разгрузки одного судна 2 суток. В предположении неограниченности очереди определить по- казатели эффективности работы причала и вероятность ожидания раз- грузки не более 2 судов.

**Задание 5.6**. На вход двухканальной СМО с неограниченной очередью поступает поток заявок с интенсивностью λ = 12 заявок в час. Время обслуживания заявки одним каналом tобсл = 15 мин. Рас- считать параметры эффективности работы системы.

**Задание 5.7.** Порт имеет один причал для разгрузки судов. Ин- тенсивность потока 0,4 в сутки, среднее время разгрузки одного судна 2 суток. Определить показатели работы порта при условии, что судно покидает порт при наличии в очереди более 3 судов.

**Задание 5.8.** В мини-маркет поступает поток покупателей с ин- тенсивностью 6 покупателей в 1 мин, которых обслуживают три кон- тролера-кассира с интенсивностью 2 покупателя в 1 мин. Длина оче- реди ограничена 5 покупателями. Оценить эффективность обслужи- вания.

**Задание 5.9**. На автомойку в среднем за час приезжают 9 авто- мобилей, но если в очереди уже находятся 4 автомобиля, вновь подъ- езжающие клиенты, как правило, не встают в очередь, а проезжают мимо. Среднее время мойки автомобиля составляет 20 мин, а мест для мойки всего два. Средняя стоимость мойки автомобиля составляет 70 руб. Определите среднюю величину потери выручки автомойки в течение дня.

**Задание 5.10.** Имеется автозаправочная станция с двумя колон- ками. В очереди не может быть больше трех машин. Интенсивность и среднее время заправки равны 2,1 и 0,55. Найти вероятность простоя системы.

**Задание 5.11**. На плодоовощную базу в среднем через 30 мин прибывают автомашины с плодоовощной продукцией. Среднее время разгрузки одной машины составляет 1,5 ч. Разгрузку производят две бригады. На территории базы у дебаркадера могут находиться в оче- реди в ожидании разгрузки не более 4 автомашин. Оценить среднее время ожидания.

**Задание 5.12.** В расчетном узле магазина самообслуживания ра- ботают 3 кассы. Интенсивность входного потока составляет 5 покупа- телей в минуту. Интенсивность обслуживания каждого контролера- кассира составляет 2 покупателя минуту. Рассчитайте параметры эф- фективности системы с неограниченной очередью.

**Задание 5.13.** В аудиторскую фирму поступает простейший по- ток заявок на обслуживание с интенсивностью λ = 1,5 заявки в день. Время обслуживания распределено по показательному закону и равно в среднем трем дням. Аудиторская фирма располагает пятью незави- симыми бухгалтерами, выполняющими аудиторские проверки (об- служивание заявок). Очередь заявок не ограничена. Дисциплина оче- реди не регламентирована. Определите вероятностные характеристи- ки аудиторской фирмы как системы массового обслуживания, рабо- тающей в стационарном режиме с неограниченной очередью.

**Задание 5.14.** В мастерской по ремонту холодильников работает n мастеров. В среднем в течение дня поступает в ремонт λ холодиль- ников. Поток заявок пуассоновский. Система массового обслужива- ния с неограниченной очередью. Время ремонта подчиняется экспо- ненциальному закону распределения вероятностей, в среднем в тече-

ние дня при семичасовом рабочем дне каждый из мастеров ремонти- рует μ холодильников.

Требуется определить:

1. вероятность того, что все мастера свободны от ремонта холо- дильников;
2. вероятность того, что все мастера заняты ремонтом;
3. среднее время ремонта одного холодильника;
4. в среднем время ожидания начала ремонта для каждого холо- дильника;
5. среднюю длину очереди, которая определяет необходимое место для хранения холодильника, требующего ремонта;
6. среднее число мастеров, свободных от работы.

# Глава 6. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

Теория игр была основана Джоном фон Нейманом и Оскаром Моргенштерном в их первой работе «The Theory of Games and Economic Behavior», изданной в 1944 году. В 1928 году в математиче- ских анналах фон Нейманом была опубликована статья «О теории общественных игр», в которой впервые было применено понятие

«теория игр». Использование этого понятия объясняется схожестью логики принятия решений в таких играх, как шахматы и покер. Ха- рактерным для таких ситуаций является то, что результат для прини- мающего решение зависит не только от его решения, но и от того, ка- кое решение примут другие. Поэтому оптимальный исход не может быть получен в результате принятия решения одним лицом.

Другим предшественником теории игр по праву считается французский математик Э. Борель (1871–1956). Некоторые фунда- ментальные идеи были независимо предложены А. Вальдом (1902– 1950), заложившим основы нового подхода к статистической теории принятия решений.

Первые приложения теория игр нашла в математической стати- стике. Во время Второй мировой войны и сразу после нее теорией игр серьезно заинтересовались военные, которые увидели в ней аппарат для исследования стратегических решений. Ее использовали как пло- дотворный источник теоретических моделей в экономике и социоло- гии. Методы теории игр используются также в теории операций и в линейном программировании.

# Предмет и задачи теории игр

В процессе целенаправленной человеческой деятельности воз- никают ситуации, в которых интересы отдельных лиц (участников, групп, сторон) либо прямо противоположны (антагонистичны), либо, не будучи непримиримыми, все же не совпадают. Простейшими и наиболее наглядными примерами таких ситуаций являются спортив- ные игры, арбитражные споры, военные учения (маневры), борьба между блоками избирателей за своих кандидатов, в международных

отношениях – отстаивание интересов своего государства и т.п. Здесь каждый из участников сознательно стремится добиться наилучшего результата за счет другого участника. Подобного рода ситуации встречаются и в различных сферах производственной деятельности.

Все ситуации, когда эффективность действия одного из участ- ников зависит от действий других, можно разбить на два типа: инте- ресы участников совпадают, и они могут договориться о совместных действиях; интересы участников не совпадают. В этих случаях может оказаться невыгодным сообщать другим участникам свои решения, так как кто-нибудь из них сможет воспользоваться знанием чужих решений и получит больший выигрыш за счет других участников. Ситуации такого типа называются ***конфликтными.***

Для указанных ситуаций характерно, что эффективность реше- ний, принимаемых в ходе конфликта каждой из сторон, существенно зависит от действий другой стороны. При этом ни одна из сторон не может полностью контролировать положение, так как и той и другой стороне решения приходится принимать в условиях неопределенно- сти. Так, при определении объема выпуска продукции на одном пред- приятии нельзя не учитывать размеры выпуска аналогичной продук- ции на других предприятиях.

В реальных условиях нередко возникают ситуации, в которых антагонизм отсутствует, но существуют противоположные тенден- ции. Например, для нормального функционирования производства, с одной стороны, необходимо наличие запасов разнообразных ресур- сов, но с другой – стремление к чрезвычайному увеличению этих за- пасов вызывает дополнительные затраты по их содержанию и хране- нию. В приведенных примерах конфликтные ситуации возникают в результате сознательной деятельности людей. Однако на практике встречаются неопределенности, которые порождаются не сознатель- ным противодействием другой стороны, а недостаточной информиро- ванностью об условиях проведения планируемой операции.

Раздел математики, изучающий конфликтные ситуации на осно- ве их математических моделей, называется ***теорией игр.*** Таким обра-

зом, теория игр – это математическая теория конфликтных ситуаций, разрабатывающая рекомендации по наиболее рациональному образу действий каждого из участников в ходе конфликтной ситуации, т.е. таких действий, которые обеспечивали бы ему наилучший результат. Игровую схему можно придать многим ситуациям в экономике. Здесь выигрышем могут быть эффективность использования дефицитных ресурсов, производственных фондов, величина прибыли, себестои- мость и т.д.

Необходимо подчеркнуть, что методы и рекомендации теории игр разрабатываются применительно к таким специфическим кон- фликтным ситуациям, которые обладают свойством ***многократной повторяемости***. Если конфликтная ситуация реализуется однократ- но или ограниченное число раз, то рекомендации теории игр теряют смысл.

Чтобы проанализировать конфликтную ситуацию по ее матема- тической модели, ситуацию необходимо упростить, учтя лишь важ- нейшие факторы, существенно влияющие на ход конфликта.

**Определение 1. *Игрой*** называется упрощенная математическая модель конфликтной ситуации, отличающаяся от реального конфлик- та тем, что ведется ***по*** определенным ***правилам***.

***Игра*** – ***это совокупность правил***, определяющих возможные действия (чистые стратегии) участников игры. Суть игры в том, что каждый из участников принимает такие решения в развивающейся конфликтной ситуации, которые, как он полагает, могут обеспечить ему наилучший исход. Исход игры – это значение некоторой функ- ции, называемой ***функцией выигрыша*** (платежной функцией), кото- рая может задаваться либо аналитически выражением, либо таблично (матрицей). Величина выигрыша зависит от стратегии, применяемой игроком.

Человечество издавна пользуется такими формализованными моделями конфликтных ситуаций, которые являются ***играми*** в бук- вальном смысле слова. Примерами могут служить шашки, шахматы, карточные игры и т.д. Все эти игры носят характер соревнования,

протекающего по известным правилам и заканчивающегося «побе- дой» (выигрышем) того или иного игрока.

Такие формально регламентированные, искусственно организо- ванные игры представляют собой наиболее подходящий материал для иллюстрации и усвоения основных понятий теории игр. Терминоло- гия, заимствованная из практики таких игр, применяется и при анали- зе других конфликтных ситуаций: стороны, участвующие в них, ус- ловно именуются ***игроками***, а результат столкновения – ***выигрышем*** одной из сторон.

**Определение 2.** Под ***правилами игры*** подразумевается система условий, регламентирующая возможные варианты действий обеих сторон.

**Определение 3**. ***Стратегией*** игрока называется совокупность правил, однозначно определяющих последовательность действий игрока в каждой конкретной ситуации, складывающейся в про- цессе игры.

**Определение 4. *Оптимальной*** называется стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш.

Основное предположение, исходя из которого находят опти- мальные стратегии, состоит в том, что противник по меньшей мере так же разумен, как и сам игрок, и делает все для того, чтобы добить- ся своей цели.

Количество стратегий у каждого игрока может быть конечным или бесконечным, в зависимости от этого игры подразделяются на конечные и бесконечные.

Всякая игра состоит из отдельных партий.

**Определение 5. *Партией*** называется каждый вариант реализа- ции игры определенным образом.

В свою очередь, в партии игроки совершают конкретные ходы.

**Определение 6**. ***Ходом*** называется выбор и реализация игроком одного из допустимых вариантов поведения*.*

Ходы бывают ***личные*** и ***случайные***. При личном ходе игрок са- мостоятельно и осознанно выбирает и реализует ту или иную чистую стратегию. Набор возможных вариантов при каждом личном ходе регламентирован правилами игры и зависит от всей совокупности предшествующих ходов обеих сторон. Например, в шахматах каждый ход является личным. При случайном ходе выбор чистой стратегии производится с использованием какого-либо механизма случайного выбора, например с применением таблицы случайных чисел. Приме- ром может служить бросание монеты или игральной кости.

Конфликтные ситуации, встречающиеся в практике, порождают различные виды игр. Классифицировать игры можно по разным при- знакам. Различают, например, игры по количеству игроков. В игре может участвовать любое конечное число игроков.

**Определение 7.** Если в игре игроки объединяются в две группы, преследующие противоположные цели, то такая игра называет- ся ***игрой двух лиц (парная игра).***

В зависимости от количества стратегий в игре они делятся на конечные или бесконечные. В зависимости от взаимоотношений уча- стников различают игры бескоалиционные (участники не имеют пра- ва заключать соглашения), или некооперативные, и коалиционные, или кооперативные. По характеру выигрышей игры делятся на игры с нулевой суммой и ненулевой суммой.

**Определение 8. *Игрой с нулевой суммой*** называется игра, в ко- торой общий капитал игроков не меняется, а лишь перераспределяет- ся в ходе игры, в связи с чем сумма выигрышей равна нулю (проиг- рыш принимается как отрицательный выигрыш).

В играх с ненулевой суммой сумма выигрышей отлична от нуля. Например, при проведении лотереи часть взноса участников идет ор- ганизатору лотереи.

По виду функции выигрыша игры делятся на ***матричные, би- матричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные и др.***

**Определение 9. *Матричной*** игрой (при двух участниках) на- зывается игра, в которой выигрыши первого игрока (проигрыши вто- рого игрока) задаются матрицей.

В биматричных играх выигрыши каждого игрока задаются своей матрицей. Другие типы таких игр различаются видом аналитического выражения платежной функции. По количеству ходов игры делятся на одноходовые (выигрыш распределяется после одного хода каждого игрока) и многоходовые (выигрыш распределяется после нескольких ходов). Многоходовые игры в свою очередь делятся на позиционные, стохастические, дифференциальные и др. В зависимости от объема имеющейся информации различают игры с полной и неполной ин- формацией.

В реальных конфликтных ситуациях каждый из игроков созна- тельно стремится найти наилучшее для себя поведение, имея общее представление о множестве допустимых для партнера ответных дей- ствий, но не ведая о том, какое же конкретное решение будет выбрано им в данный момент. В этом проявляется в равной мере неопределен- ность ситуации для каждого из партнеров.

**Определение 10**. Игры, в которых участники стремятся добить- ся для себя наилучшего результата, сознательно выбирая допустимые правилами игры способы действий, называются ***стратегическими****.*

Однако в экономической практике нередко приходится форма- лизовать (моделировать) ситуации, придавая им игровую схему, в ко- торых один из участников безразличен к результату игры. Такие игры называют ***играми с природой****,* понимая под термином "***природа***" всю совокупность внешних обстоятельств, в которых сознательному игро- ку (его называют иногда статистиком, а соответствующую игру – ста- тистической) приходится принимать решение. Например, выбор агро- номической службой сельскохозяйственного предприятия участков для посева той или иной культуры в надежде получить в предстоящем году наилучший урожай; определение объема выпуска сезонной про- дукции в ожидании наиболее выгодного для ее реализации уровня спроса; формирование пакета ценных бумаг в расчете на высокие ди-

виденды и т.п. Здесь в качестве второго игрока выступает: в первом примере – в буквальном смысле природа; во втором – уровень спроса; в третьем – размеры ожидаемой прибыли.

В играх с природой степень неопределенности для сознательно- го игрока (статистика) возрастает: если в стратегических играх каж- дый из участников постоянно ожидает наихудшего для себя ответного действия партнера, то в статистических играх «природа», будучи ин- дифферентной в отношении выигрыша инстанцией, может предпри- нимать и такие ответные действия (будем говорить: реализовывать такие состояния), которые ей совершенно невыгодны, а выгодны соз- нательному игроку (статистику).

В дальнейшем мы будем рассматривать только парные матрич- ные игры с нулевой суммой. В случае конечной игры двух лиц функ- ции выигрыша каждого из игроков удобно представлять в виде матрицы выигрышей, где строки представляют стратегии одного иг- рока, столбцы – стратегии другого игрока, а в клетках матрицы ука- зываются выигрыши каждого из игроков в каждой из образующихся ситуаций.

# Решение матричной игры в чистых стратегиях

Рассмотрим простейшую математическую модель конечной конфликтной ситуации, в которой имеется два участника и выигрыш одного равен проигрышу другого. Такая модель называется ***антаго- нистической игрой*** двух лиц с нулевой суммой.

Игра состоит из двух ходов: игрок ***А*** выбирает одну из возмож- ных стратегий 𝐴𝑖, 𝑖 = ̅1̅̅,̅𝑚̅̅ (либо *А1*, либо *А2* и т.д., вплоть до *Am*), а игрок ***В*** выбирает одну из возможных стратегий 𝐵j , j = ̅1̅̅,̅𝑛̅ (либо *В1*,

либо *В2* и т.д., вплоть до *Bn*). Каждый выбор производится при полном незнании выбора соперника. В результате выигрыш игроков составит соответственно матрицу: 𝑎𝑖j и −𝑎𝑖j. Цель игрока ***А*** – максимизиро- вать величину 𝑎𝑖j , а игрока ***В*** – минимизировать эту величину.

**Определение 1.** *Матрица, составленная из величин* 𝑎𝑖j 𝑖 = ̅1̅̅,̅𝑚̅̅

j = ̅1̅̅,̅𝑛̅*, называется платежной матрицей, или матрицей игры.*

𝐴 = (

𝑎11 𝑎12

𝑎 𝑎

21 22

. . . . . .

. . . 𝑎1𝑛

. . . 𝑎

2𝑛

. . . . . . ) .

𝑎𝑚1 𝑎𝑚2

. . . 𝑎𝑚𝑛

Каждый элемент платежной матрицы 𝑎𝑖j 𝑖 = ̅1̅̅,̅𝑚̅̅, j = ̅1̅̅,̅𝑛̅ ра- вен выигрышу ***А*** (проигрышу ***В***), если он выбрал какую-то конкрет- ную стратегию *А i* , 𝑖 = ̅1̅̅,̅𝑚̅̅ , а игрок ***В*** выбирал какую-то конкретную стратегию *В j* , j = ̅1̅̅,̅𝑛̅ .

**Пример***.* В игре участвуют первый и второй игроки, каждый из них может записать независимо от другого цифры *1*, *2* и *3*. Если раз- ность между цифрами, записанная игроками, положительна, то пер- вый игрок выигрывает количество очков, равное разности между цифрами, и, наоборот, если разность отрицательна, то выигрывает второй игрок. Если разность равна нулю, то игра заканчивается вни- чью.

У первого игрока три стратегии (варианта дейст- вия): *А* 1 (записать *1*), *А* 2 (записать *2*), *А* 3 (записать *3*); у второго игро- ка также три стратегии: *В*1 , *В*2 , *В*3 ( табл.6.1).

Таблица 6.1

Задача по теории игр

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *B1 =* ***1*** | *B2 =* ***2*** | *B3 =* ***3*** |
| *A1 =* ***1*** | 0 | -1 | -2 |
| *A2 =* ***2*** | 1 | 0 | -1 |
| *A3 =* ***3*** | 2 | 1 | 0 |

Задача первого игрока – максимизировать свой выигрыш. Задача второго игрока – минимизировать свой проигрыш или минимизиро- вать выигрыш первого игрока. Платежная матрица имеет вид

0 −1 −2

𝐴 = (1 0 −1) .

2 1 0

Здесь матрица *А*, а её элементы – 𝑎𝑖j (𝑎11 = 0, 𝑎12 = −1, 𝑎13 = −2,

𝑎21 = 1, 𝑎22 = 0, 𝑎23 = −1, 𝑎31 = 2, 𝑎32 = 1, 𝑎33 = 0).

Задача каждого из игроков – найти наилучшую стратегию игры, при этом предполагается, что противники одинаково разумны и каж- дый из них делает все, чтобы получить наибольший доход.

Найдем наилучшую стратегию первого игрока. Если игрок ***А***

выбрал какую-то стратегию *Ai* , 𝑖 = ̅1̅̅,̅𝑚̅̅ (либо *А1*, либо *А2* либо *А3*), то в худшем случае (например, если его ход известен ***В***) он получит выигрыш 𝛼𝑖 = minj 𝑎𝑖j (т.е. минимальное значение 𝑎𝑖j при каком-то конкретном значении *i*, когда *j* пробегает все свои значения, а именно:

𝛼1 = 𝑚𝑖𝑛j 𝑎1j = 𝑚𝑖𝑛(0, −1, −2) = −2,

𝛼2 = 𝑚𝑖𝑛j 𝑎2j = 𝑚𝑖𝑛(1,0, −1) = −1, 𝛼3 = 𝑚𝑖𝑛j 𝑎3j = 𝑚𝑖𝑛(2,1,0) = 0). Предвидя такую возможность, игрок ***А*** должен выбрать такую стратегию, чтобы максимизировать свой минимальный выигрыш, т.е.

из возможных вариантов 0, -1, -2 получить 0.

𝑎 = 𝑚𝑎𝑥𝑖 𝛼𝑖 = 𝑚𝑎𝑥𝑖(𝑚𝑖𝑛j 𝑎𝑖j) = 𝑚𝑎𝑥𝑖 𝑚𝑖𝑛j 𝑎𝑖j . (6.1)

**Определение 2.** *Величина a – гарантированный выигрыш игро- ка* ***А*** – *называется нижней ценой игры. Стратегия Ai опт, обеспечи- вающая получение выигрыша a, называется максиминной.*

Если первый игрок будет придерживаться своей максиминной стратегии, то у него есть гарантия, что он в любом случае выиграет не меньше *a*.

Аналогично определяется наилучшая стратегия второго игрока. Игрок ***В*** при выборе стратегии *В*j , j = ̅1̅̅,̅𝑛̅, в худшем случае получит проигрыш 𝑏j = max𝑖 𝑎𝑖j *.* Он выбирает стратегию *Bj опт,* при которой

его проигрыш будет минимальным и составит

𝑏 = 𝑚𝑖𝑛j 𝑏j = 𝑚𝑖𝑛j 𝑚𝑎𝑥𝑖 𝑎𝑖j . (6.2)

**Определение 3.** *Величина b – гарантированный проигрыш иро- ка* ***В*** *– называется верхней ценой игры. Стратегия Bj опт, обеспечи- вающая получение проигрыша b, называется минимаксной.*

Если второй игрок будет придерживаться своей минимаксной стратегии, то у него есть гарантия, что он в любом случае проиграет не больше *b*.

Фактический выигрыш игрока ***А*** (проигрыш игрока ***В***) при ра- зумных действиях партнеров ограничен верхней и нижней ценой иг- ры. Для матричной игры справедливо неравенство (𝑎 ≤ 𝑏).

**Определение 4.** *Если a = b = v, т.е.*

𝑚𝑎𝑥𝑖 𝑎𝑖 = 𝑚𝑎𝑥𝑖 𝑚𝑖𝑛j 𝑎𝑖j = 𝑚𝑖𝑛j 𝑏j = 𝑚𝑖𝑛j 𝑚𝑎𝑥𝑖 𝑎𝑖j *,*

*то выигрыш игрока А (проигрыш игрока В) определяется числом v. Оно называется ценой игры.*

**Определение 5.** *Если a = b = v, то такая игра называется иг- рой с седловой точкой, элемент матрицы а iопт jопт = v, соответст- вующий паре оптимальных стратегий (Ai опт, Bj опт), называется сед- ловой точкой матрицы. Этот элемент является ценой игры.*

Седловой точке соответствуют оптимальные стратегии игроков. Их совокупность – решение игры, которое обладает свойством: если один из игроков придерживается оптимальной стратегии, то второму отклонение от своей оптимальной стратегии не может быть выгодным.

**Определение 6.** *Если игра имеет седловую точку, то говорят, что она решается в чистых стратегиях.*

***Найдем*** решение игры рассмотренного выше примера.

𝑎 = 𝑚𝑎𝑥𝑖 𝛼𝑖 = 𝑚𝑎𝑥𝑖 𝑚𝑖𝑛j 𝑎𝑖j *.*

Как показано выше:

Следовательно,

𝑚𝑖𝑛j 𝑎𝑖j = −2, −1, 0*.*

𝑎 = 𝑚𝑎𝑥 𝛼𝑖 = 𝑚𝑎𝑥 𝑚𝑖𝑛 𝑎𝑖j = 𝑚𝑎𝑥((−2, −1, 0)) = 0,

𝑖 𝑖 j

*a =0 –* нижняя цена игры.

𝑏 = 𝑚𝑖𝑛 𝑏j = 𝑚𝑖𝑛 𝑚𝑎𝑥 𝑎𝑖j = 𝑚𝑖𝑛(2,1,0) = 0,

j j 𝑖

*b = 0 –* верхняя цена игры.

Так как *a* = *b* = 0, матрица игры имеет седловую точку. Оптимальная стратегия первого игрока – *А3* , второго – *B* 3 .

Из таблицы видно, что отклонение первого игрока от оптимальной стратегии уменьшает его выигрыш, а отклонение второго игрока от *В*3 увеличивает его проигрыш.

Наличие седловой точки в игре – это далеко не правило, скорее, исключение. Существует разновидность игр, которые всегда имеют

седловую точку и, значит, решаются в чистых стратегиях. Это так на- зываемые игры с полной информацией.

**Определение 7.** *Игрой с полной информацией называется такая игра, в которой каждый игрок при каждом личном ходе знает всю пре- дысторию ее развития, т.е. результаты всех предыдущих ходов.*

Примерами игр с полной информацией могут служить шашки, шахматы, "крестики-нолики" и т.д.

*Теорема*. Каждая игра с полной информацией имеет седловую точку и, значит, имеет решение в чистых стратегиях.

В каждой игре с полной информацией существует пара опти- мальных стратегий, дающая устойчивый выигрыш, равный цене иг- ры *v*. Если решение игры известно, сама игра теряет смысл. Напри- мер, шахматная игра либо кончается выигрышем белых, либо выиг- рышем черных, либо ничьей, только чем именно – мы пока не знаем (к счастью для любителей шахмат). Добавим еще: вряд ли будем знать это в обозримом будущем, так как число стратегий так велико, что крайне трудно привести шахматную игру к матричной форме и найти в ней седловую точку.

# Решение матричной игры в смешанных стратегиях

Если платежная матрица не имеет седловой точки, т.е. *a < b* и

𝑎 ≤ 𝑣 ≤ 𝑏, то поиск решения игры приводит к применению сложной стратегии, состоящей в случайном применении двух и более страте- гий с определенными частотами.

**Определение 1.** Сложная стратегия, состоящая в случайном применении всех стратегий с определенными частотами, называет- ся *смешанной.*

В игре, матрица которой имеет размерность 𝑚 × 𝑛 , стратегии первого игрока задаются наборами вероятностей X̅ = (𝑥1, 𝑥2, . . . 𝑥𝑚 ), с которыми игрок применяет свои чистые стратегии. Эти наборы мож- но рассматривать как *m* -мерные векторы, для координат которых вы- полняются условия

𝑚

∑ 𝑥𝑖 = 1 𝑖 = ̅1̅̅,̅𝑚̅̅ .

𝑖=1

Аналогично для второго игрока наборы вероятностей определя- ют *n* -мерные векторы 𝑌̅ = (𝑦1, 𝑦2, . . . , 𝑦𝑛, ), для координат которых выполняются условия

𝑛

∑ 𝑦j

j=1

= 1 j = ̅1̅̅,̅𝑛̅ .

Выигрыш первого игрока при использовании смешанных стра- тегий определяют как математическое ожидание выигрыша, т.е. он равен:

𝑚 𝑛

∑ ∑ 𝑎𝑖j𝑥𝑖 𝑦j .

𝑖=1 j=1

***Теорема Неймана. Основная теорема теории игр.*** Каждая ко- нечная игра имеет по крайней мере одно решение, возможно, в облас- ти смешанных стратегий. Применение оптимальной стратегии позво- ляет получить выигрыш, равный цене игры: a<*v* <b. Применение пер-

вым игроком оптимальной стратегии Х̅*опт* должно обеспечить ему при

любых действиях второго игрока выигрыш не меньше цены игры. По- этому выполняется соотношение

𝑚

∑

𝑖=1

𝑎𝑖j𝑥𝑖*опт* ≥ 𝑣, j = ̅1̅̅,̅𝑛̅ . (6.3)

Аналогично для второго игрока оптимальная стратегия

𝑌̅*опт* должна обеспечить при любых стратегиях первого игрока проиг- рыш, не превышающий цену игры, т.е. справедливо соотношение

𝑛 j=1

∑

𝑎𝑖j𝑦j*опт* ≤ 𝑣, 𝑖 = ̅1̅̅,̅𝑚̅̅ . (6.4)

Если платежная матрица не содержит седловой точки, то задача определения смешанной стратегии тем сложнее, чем больше размер- ность матрицы. Поэтому матрицы большой размерности целесооб- разно упростить, уменьшив их размерность путем вычеркивания дуб- лирующих (одинаковых) и не доминирующих стратегий.

**Определение 2.** *Дублирующими* называются стратегии, у кото- рых соответствующие элементы платежной матрицы одинаковы.

**Определение 3.** Если все элементы i-й строки платежной мат- рицы больше соответствующих элементов k-й строки, то i-я стратегия игрока ***А*** называется *доминирующей над k-й стратегией.* Если все

элементы j-го столбца платежной матрицы меньше соответствующих элементов k-го столбца, то j-я стратегия игрока ***В*** называет- ся *доминирующей над k-й стратегией.*

**Пример.** Рассмотрим игру, представленную платежной матрицей

𝐴 = ( ) .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 7 | 6 | 5 | 4 2 |
| 5 4 3 2 3 | | | |
| 5 | 6 | 6 | 3 5 |
| 2 | 3 | 3 | 2 4 |

Для игрока ***А*** имеем: гарантированный выигрыш этого игрока или нижняя цена игры:

𝑎 = 𝑚𝑎𝑥 𝛼𝑖 = 𝑚𝑎𝑥 𝑚𝑖𝑛 𝑎𝑖j = 𝑚𝑎𝑥(2,2,3,2) = 3 .

𝑖 𝑖 j

Для игрока ***В*** имеем: гарантированный проигрыш этого игрока, или верхняя цена игры.

𝑏 = 𝑚𝑖𝑛 𝑏j = 𝑚𝑖𝑛 𝑚𝑎𝑥 𝑎𝑖j = 𝑚𝑖𝑛(7,6,6,4,5) = 4 .

j j 𝑖

Однако исходную матрицу можно упростить. Мы видим, что все элементы стратегии *А*2 меньше элементов стратегии *А*3 , т.е. *А*2 заведомо невыгодна для первого игрока и ее можно исключить. Далее все элементы *А*4 меньше *А*3, поэтому исключаем и *А*4. В итоге получим:

7 6 5 4 2

𝐴 = ( ) .

5 6 6 3 5

Для второго игрока: сравнивая *В*1 и *В*4 , исключа- ем *В*1 (поскольку для второго игрока это матрица проигрышей и ему выгодно убрать больший проигрыш); сравнивая *В*2 и *В*4 , исключа- ем *В*2 ; сравнивая *В*3 и *В*4 , исключаем *В*3 . В результате преобразова- ний получим матрицу

𝐴 = 4 2

( ) .

3 5

Для этой матрицы:

𝑎 = 𝑚𝑎𝑥 𝛼𝑖 = 𝑚𝑎𝑥 𝑚𝑖𝑛 𝑎𝑖j = 𝑚𝑎𝑥(2,3) = 3 ,

𝑖 𝑖 j

𝑏 = 𝑚𝑖𝑛 𝑏j = 𝑚𝑖𝑛 𝑚𝑎𝑥 𝑎𝑖j = 𝑚𝑖𝑛(4,5) = 4 .

j j 𝑖

Действительно, получили тот же самый результат. Отсюда: *a< b* , и 3 ≤ 𝑣 ≤ 4.

# Решение игр графическим методом

Графический метод применим к играм, в которых хотя бы один игрок имеет ***только две*** стратегии.

***Первый случай.*** Рассмотрим игру (2 × 2) с матрицей

𝐴 = (𝑎11 𝑎12)

𝑎 𝑎

21 22

без седловой точки. Решением игры являются смешанные стратегии игроков X̅ = (𝑥1, 𝑥2) и 𝑌̅ = (𝑦1, 𝑦2) , где *x1* – вероятность примене- ния первым игроком первой стратегии, *x2* – вероятность применения первым игроком второй стратегии, *y1* – вероятность применения вто-

рым игроком первой стратегии, *y2* – вероятность применения вторым игроком второй стратегии. Очевидно, что

*x* 1 + *x* 2 = 1, *y* 1 + *y* 2 = 1.

Найдем решение игры графическим методом, как показано на рис. 6.1.

*a12*



*B2*

*K*

*B1 a21*

*B2*

*a22*

*B1*

*A1*

x=0

*A2*

x=1

*a11*

X

Рис. 6.1. Графический метод решения. Этап 1

На оси *ОX* отложим отрезок, длина которого равна единице. Левый конец (*x* = 0) соответствует стратегии первого игрока *А1* , пра- вый (*x* = 1) – стратегии *А*2 . Внутренние точки отрезка будут соответ-

ствовать смешанным стратегиям X̅ = (𝑥1, 𝑥2) первого игрока, где

𝑥1 = 1 − 𝑥2 . Через концы отрезка проведем прямые, перпендикуляр- ные оси *ОX*, на которых будем откладывать выигрыш при соответст-

вующих чистых стратегиях. Если игрок ***В*** применяет стратегию *В*1 , то выигрыш при использовании первым игроком стратегий *А*1 и *А*2 со- ставит соответственно *а*11 и *а*21 . Отложим эти точки на прямых и со- единим их отрезком *В*1*В*1.

Если игрок А применяет смешанную стратегию, то выиг- рышу соответствует некоторая точка *K*, лежащая на этом отрезке (рис. 6.2).

*a12*



*B2*

*K*

*B1 a21*

*B2*

*a22*

*B1*

*A1*

x=0

*A2*

x=1

*a11*

X

Рис. 6.2. Графический метод. Этап 2

Аналогично строится отрезок *В*2*В*2 , соответствующий стратегии

*В*2 игрока ***В***.

**Определение 1.** Ломаная линия, составленная из частей отрез- ков, интерпретирующих стратегии игрока В, расположенная ниже всех отрезков, называется *нижней границей выигрыша*, получаемого игроком ***А***.

**Определение 2.** Стратегии, части которых образуют нижнюю границу выигрыша, называются *активными стратегиями.*

В игре (2 × 2) обе стратегии являются активными.

Ломаная *В1КВ*2 является нижней границей выигрыша, получае- мого игроком ***А*** (см. рис. 6.2). Точка *К*, в которой он максимален, оп- ределяет цену игры и ее решение. Найдем оптимальную стратегию первого игрока.

Согласно теореме Неймана:

𝑚

∑ 𝑎𝑖j𝑥𝑖*опт* ≥ 𝑣, j = ̅1̅̅,̅𝑛̅ .

𝑖=1

Из этого соотношения запишем систему уравнений. Правые части равны, следовательно, равны и левые части:

𝑎11𝑥1 + 𝑎21𝑥2 = 𝑎12𝑥1 + 𝑎22𝑥2.

Получили одно уравнение с двумя неизвестными. Поэтому необходи- мо добавить второе уравнение из условия, что полная вероятность равна единице, т.е.: 𝑥1 + 𝑥2 = 1.

Получили систему двух уравнений с двумя неизвестными, кото-

рая имеет единственное и однозначное решение:

𝑎11𝑥1 + 𝑎21𝑥2 = 𝑎12𝑥1 + 𝑎22𝑥2 ,

{ 𝑥1 + 𝑥2 = 1.

Решаем её. Исключаем *х2*:

𝑎11𝑥1 + 𝑎21(1 − 𝑥1) = 𝑎12𝑥1 + 𝑎22(1 − 𝑥1) .

Раскроем скобки:

𝑎11𝑥1 + 𝑎21 − 𝑎21𝑥1 = 𝑎12𝑥1 + 𝑎22 − 𝑎22𝑥1 .

Приведём подобные члены:

𝑎11𝑥1 − 𝑎12𝑥1 + 𝑎22𝑥1 − 𝑎21𝑥1 = 𝑎22 − 𝑎21 .

Отсюда найдём *х1*:

𝑥1

= 𝑎22−𝑎21 . (6.5)

𝑎11+𝑎22−𝑎12−𝑎21

Аналогично, исключая 𝑥1, найдём *х2*:

𝑥2

= 𝑎11−𝑎12 . (6.6)

𝑎11+𝑎22−𝑎12−𝑎21

Зная 𝑥1 *и* 𝑥2, найдём 𝑣, исходя из, например, 𝑎11𝑥1 + 𝑎21𝑥2 = 𝑣:

𝑎22 − 𝑎21

𝑣 = 𝑎11𝑥1 + 𝑎21𝑥2 = 𝑎11 ∙

𝑎

11

+ 𝑎22

− 𝑎12

+

− 𝑎21

𝑎11 − 𝑎12

+𝑎21 ∙

𝑎

11

+ 𝑎22 − 𝑎12

.

− 𝑎21

𝑣 =

𝑎11 ∙ (𝑎22 − 𝑎21) + 𝑎21 ∙ (𝑎11 − 𝑎12)

,

𝑎11 + 𝑎22 − 𝑎12 − 𝑎21

𝑎11 ∙ 𝑎22 − 𝑎11 ∙ 𝑎21 + 𝑎21 ∙ 𝑎11 − 𝑎21 ∙ 𝑎12

𝑣 =

𝑎11

+ 𝑎22

− 𝑎12

,

− 𝑎21

𝑣 = 𝑎11∙𝑎22−𝑎21∙𝑎12

𝑎11+𝑎22−𝑎12−𝑎21

. (6.7)

Найдём теперь *у*, используя вторую часть теоремы Неймана (6.4).

𝑛

∑ 𝑎𝑖j 𝑦j*опт* ≤ 𝑣, 𝑖 = ̅1̅̅,̅𝑚̅̅ .

j=1

Составим аналогичную предыдущему систему:

{𝑎11𝑦1 + 𝑎12𝑦2 = 𝑣 (𝑖 = 1) ,

𝑎21𝑦1 + 𝑎22𝑦2 = 𝑣 (𝑖 = 2) .

Учитывая условие 𝑦1 + 𝑦2 = 1, найдём оптимальную стратегию игрока ***В***. Так как равны правые части системы, то равны и левые:

𝑎11𝑦1 + 𝑎12𝑦2 = 𝑎21𝑦1 + 𝑎22𝑦2 .

Исключаем 𝑦1:

𝑎11 ∙ (1 − 𝑦2) + 𝑎12𝑦2 = 𝑎21 ∙ (1 − 𝑦2) + 𝑎22𝑦2 .

Раскрываем скобки:

𝑎11 − 𝑎11 ∙ 𝑦2 + 𝑎12𝑦2 = 𝑎21 − 𝑎21 ∙ 𝑦2 + 𝑎22𝑦2 .

Группируем подобные члены:

− 𝑎11 ∙ 𝑦2 + 𝑎12𝑦2 + 𝑎21 ∙ 𝑦2 − 𝑎22𝑦2 = 𝑎21 − 𝑎11 .

Меняем знак:

𝑎11 ∙ 𝑦2 − 𝑎12𝑦2 − 𝑎21 ∙ 𝑦2 + 𝑎22𝑦2 = 𝑎11 − 𝑎21 .

Получим:

Теперь найдём 𝑦1.

𝑦2

= 𝑎11−𝑎21 . (6.8)

𝑎11+𝑎22−𝑎12−𝑎21

𝑎11 − 𝑎21 𝑎22 − 𝑎12

𝑦1 = 1 − 𝑦2 = 1 −

𝑎

11

+ 𝑎22

− 𝑎12

− 𝑎21

=

𝑎11

+ 𝑎22

− 𝑎12

,

− 𝑎21

𝑦1

= 𝑎22−𝑎12 . (6.9)

𝑎11+𝑎22−𝑎12−𝑎21

Раньше мы уже нашли цену игры 𝑣 (6.7). Посмотрим, будет ли она такой же и для этой системы уравнений. Имеем:

𝑣 = 𝑎11𝑦1 + 𝑎12𝑦2 .

Отсюда

𝑎22 − 𝑎12

𝑣 = 𝑎11𝑦1 + 𝑎12𝑦2 = 𝑎11 ∙

𝑎

11

+ 𝑎22

− 𝑎12

+

− 𝑎21

𝑎11 − 𝑎21

+𝑎12 ∙

𝑎

11

+ 𝑎22 − 𝑎12

,

− 𝑎21

𝑣 =

𝑎11 ∙ (𝑎22 − 𝑎12) + 𝑎12 ∙ (𝑎11 − 𝑎21)

=

𝑎11 + 𝑎22 − 𝑎12 − 𝑎21

𝑎11 ∙ 𝑎22 − 𝑎11 ∙ 𝑎12 + 𝑎12 ∙ 𝑎11 − 𝑎12 ∙ 𝑎21

=

𝑎11

+ 𝑎22

− 𝑎12

,

− 𝑎21

𝑣 =

𝑎11 ∙ 𝑎22 − 𝑎12 ∙ 𝑎21

.

𝑎11 + 𝑎22 − 𝑎12 − 𝑎21

Получили одинаковые для 𝑣 ответы, что естественно.

**Пример 1***.* Найти решение игры, заданной числовой матрицей

1 3

Для этой матрицы:

𝐴 = ( ) .

2 1

𝑎 = 𝑚𝑎𝑥 𝛼𝑖 = 𝑚𝑎𝑥 𝑚𝑖𝑛 𝑎𝑖j = 𝑚𝑎𝑥(1,1) = 1 ,

𝑖 𝑖 j

𝑏 = 𝑚𝑖𝑛 𝑏j = 𝑚𝑖𝑛 𝑚𝑎𝑥 𝑎𝑖j = 𝑚𝑖𝑛(3,2) = 2 ,

j j 𝑖

1 ≤ 𝑣 ≤ 2 .

Игра не имеет седловой точки, так как 𝑎 ≠ 𝑏. Оптимальное ре- шение следует искать в области смешанных стратегий. Построим на плоскости отрезки, соответствующие стратегиям второго игрока (рис. 6.3).

*a12=3*



3 *B2* 3

*B1*

2 *K* 2

*a21=2*

1,66

*a11=1* 1

*B1*

*v* 1 *a22=1*

*2*

*B*

*A1 A2*

X

x2 *N*

x

1

Рис. 6.3. Графический метод. Этап 3

Находим оптимальные стратегии и цену игры:

𝑎22 − 𝑎21

1 − 2

−1 1

𝑥1 =

𝑎

11

+ 𝑎22

− 𝑎12

− 𝑎21

= = = ,

1 + 1 − 3 − 2 −3 3

𝑎11 − 𝑎12

1 − 3

−2 2

𝑥2 =

𝑎

11

+ 𝑎22

− 𝑎12

− 𝑎21

= = = ,

1 + 1 − 3 − 2 −3 3

𝑎22 − 𝑎12

1 − 3

−2 2

𝑦1 =

𝑎

11

+ 𝑎22

− 𝑎12

− 𝑎21

= 1 + 1 − 3 − 2 = −3 = 3,

𝑎11 − 𝑎21

1 − 2

−1 1

𝑦2 =

𝑎

11

+ 𝑎22

− 𝑎12

− 𝑎21

= = , 1 + 1 − 3 − 2 −3 3

𝑣 =

𝑎11 ∙ 𝑎22 − 𝑎21 ∙ 𝑎12

𝑎11 + 𝑎22 − 𝑎12 − 𝑎21

1 ∙ 1 − 2 ∙ 3

=

1 + 1 − 3 − 2

−5 5

= = ,

−3 3

*x* 1 = 1/3, *x* 2 = 2/3; *y* 1 = 2/3, *y* 2 = 1/3; *v* =5/3=1,66.

*Ответ.* Оптимальные смешанные стратегии игроков

X̅ = (1/3, 2/3), 𝑌̅ = (2/3, 1/3), цена игры составляет 𝑣 = 5/3.

Данный ответ означает следующее:

Если первый игрок с вероятностью 1/3 будет применять первую стратегию и с вероятностью 2/3 вторую, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей его выигрыш в среднем составит не менее 5/3.

Если второй игрок с вероятностью 2/3 будет применять первую стратегию и с вероятностью 1/3 вторую, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей его проигрыш в среднем составит не более 5/3.

***Второй случай.*** Рассмотрим игру с матрицей (2 × 𝑛)

𝐴 = (𝑎11 𝑎12 . . . 𝑎1𝑛) .

𝑎21 𝑎22 . . . 𝑎2𝑛

Для каждой из *n* стратегий игрока ***В*** строится соответствующий ей отрезок на плоскости. Находится нижняя граница выигрыша, по- лучаемого игроком ***А***, и определяется точка на нижней границе, соот- ветствующая наибольшему выигрышу. Выделяются две активные стратегии игрока ***В***, отрезки которых проходят через данную точку. Далее рассматриваются только эти две стратегии игрока ***В***. Игра сво- дится к игре с матрицей (2 × 2).

**Пример 2*.*** Найти решение игры, заданной матрицей

2 3 1 4

𝐴 = ( ) .

4 2 3 1

Находим верхнюю и нижнюю цену игры.

Согласно (1) – 𝑎 = 𝑚𝑎𝑥𝑖 𝛼𝑖 = 𝑚𝑎𝑥𝑖 𝑚𝑖𝑛j 𝑎𝑖j . Следовательно,

*a = max* (*1,1*) = 1.

Согласно (2) – 𝑏 = 𝑚𝑖𝑛j 𝑏j = 𝑚𝑖𝑛j 𝑚𝑎𝑥𝑖 𝑎𝑖j . Следовательно,

*b = min* (4, 3, 3, 4) = 3.

То есть *a < b* , 1 < *v* <3.

Игра не имеет седловой точки. Оптимальное решение следует искать в области смешанных стратегий. Построим на плоскости от- резки, соответствующие стратегиям второго игрока: *В1*=(*2, 4*), *В2*=(*3, 2*), *В3*=(*1, 3*), *В4*=(*4, 1*) (рис. 6.4).

*B4*



4

4 *B1*

3

*K*

3 *B3*

2

2 *B2*

*v*

1

1 *B4*

*N*

x1

*B2*

*B1*

*B3*

X

x2

Рис. 6.4. Графический метод. Этап 4

Нижней границей выигрыша для игрока ***А*** является лома- ная *В3КВ4* . Стратегии *В*3 и *В*4 являются активными стратегиями игро- ка ***В***. Точка их пересечения ***К*** определяет оптимальные стратегии иг- роков и цену игры. Второму игроку невыгодно применять страте- гии *В*1 и *В*2, поэтому вероятность их применения равна нулю,

т.е. *у* 1 = *у* 2 = 0. Решение игры сводится к решению игры с матрицей

(2 × 2), т. е. 𝐴 =

( ). Соответственно этой матрице найдём:

3 1

1 4

*a = max* (1, 1) = 1, *b = min* (3, 4) = 3, *a* < *b*, 1 < *v* < 3*.*

По формулам (6.5) – (6.9) находим оптимальные стратегии и це- ну игры:

𝑎22 − 𝑎21

1 − 3

−2 2

𝑥1 =

𝑎

11

+ 𝑎22

− 𝑎12

− 𝑎21

= = = ,

1 + 1 − 4 − 3 −5 5

𝑎11 − 𝑎12

1 − 4

−3 3

𝑥2 =

𝑎

11

+ 𝑎22

− 𝑎12

− 𝑎21

= 1 + 1 − 4 − 3 = −5 = 5,

𝑎22 − 𝑎12

1 − 4

−3 3

𝑦1 = 𝑦3 =

𝑎

11

+ 𝑎22

− 𝑎12

− 𝑎21

= = = ,

1 + 1 − 4 − 3 −5 5

𝑎11 − 𝑎21

1 − 3

−2 2

𝑦2 = 𝑦4 =

𝑎

11

+ 𝑎22

− 𝑎12

− 𝑎21

= = = ,

1 + 1 − 4 − 3 −5 5

𝑎11 ∙ 𝑎22 − 𝑎21 ∙ 𝑎12

1 ∙ 1 − 3 ∙ 4

−11 11

𝑣 =

𝑎

11

+ 𝑎22

− 𝑎12

− 𝑎21

= 1 + 1 − 4 − 3 =

−5 = 5 ,

*x*1 = 2/5; *x*2 = 3/5; *y*3 = 3/5; *y*4 = 2/5; *v* =11/5.

*Ответ.* Оптимальные смешанные стратегии игроков

X̅ = (2/5, 3/5) и 𝑌̅ = (0, 0, 3/5, 2/5), цена игры составляет *v* =11/5.

Данный ответ означает следующее:

1. Если первый игрок с вероятностью 2/5 будет применять пер- вую стратегию и с вероятностью 3/5 вторую, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей его выигрыш в среднем составит не менее 11/5.
2. Если второй игрок с вероятностью 3/5 будет применять тре- тью стратегию, с вероятностью 2/5 четвертую и не будет использо- вать первую и вторую стратегии, то при достаточно большом количе- стве игр с данной матрицей его проигрыш в среднем составит не бо- лее 11/5.

***Третий случай.*** Рассмотрим игру с матрицей (𝑚 × 2)

𝑎11

𝐴 = ( 𝑎21

. . .

𝑎𝑚1

𝑎12

𝑎22 ) .

. . .

𝑎𝑚2

Решение игры может быть получено аналогично случаю два. Для каждой из *m* стратегий игрока ***А*** строится соответствующий ей отрезок на плоскости.

Находится верхняя граница проигрыша, получаемого игроком ***В***, и определяется точка на нижней границе, соответствующая наи- меньшему проигрышу. Выделяются две активные стратегии игрока ***А***, отрезки которых проходят через данную точку.

Далее рассматриваются только эти две стратегии игрока ***А.*** Игра сводится к игре с матрицей (2 × 2) .

**Пример 3***.* Найти решение игры, заданной матрицей

4

𝐴 = ( 2

0

3

4) .

5

−1 6

Согласно (6.1):

𝑎 = 𝑚𝑎𝑥 𝛼𝑖 = 𝑚𝑎𝑥 𝑚𝑖𝑛 𝑎𝑖j = 𝑚𝑎𝑥(3, 2, 0, −1) = 3 .

𝑖

Согласно (6.2):

𝑖 j

𝑏 = 𝑚𝑖𝑛 𝑏j = 𝑚𝑖𝑛 𝑚𝑎𝑥 𝑎𝑖j = 𝑚𝑖𝑛(4, 6) = 4 .

j j 𝑖

Следовательно, a < b; 3 < v < 4.

Игра не имеет седловой точки. Оптимальное решение следует искать в области смешанных стратегий. Построим на плоскости от- резки, соответствующие стратегиям первого игрока (рис. 6.5).

*A1*



6

6 *A*

*4*

5

5

*A*

*3*

4

*K*

4

*A*

*2*

3

3 *A1*

2

*v*

2

1 1

y2

*N*

-1

y1

*A2*

*A3* Y

*A4*

Рис. 6.5. Графический метод. Этап 5

Верхней границей проигрыша для игрока ***В*** является лома- ная *А1КА4* . Стратегии *А1* и *А4* являются активными стратегиями игро- ка ***А***. Точка их пересечения ***К*** определяет оптимальные стратегии иг- роков и цену игры. Первому игроку невыгодно применять страте- гии *А2* и *А3*, поэтому вероятность их применения равна нулю, т.е. *x*2 = *x*3 = 0. Решение игры сводится к решению игры с матрицей (2 × 2).

𝐴 = ( 4 3).

−1 6

Соответственно этой матрице найдём:

*a = max* (3, -1) = 3, *b = min* (4, 6) = 4, *a < b* , 3 < *v* < 4 .

Затем находим оптимальные стратегии и цену игры.

𝑎22 − 𝑎21

6 + 1 7

𝑥1 =

𝑎

11

+ 𝑎22 − 𝑎12

− 𝑎21

= 4 + 6 − 3 + 1 = 8 ,

𝑎11 − 𝑎12

4 − 3 1

𝑥2 = 𝑥4 =

𝑎

11

+ 𝑎22 − 𝑎12

− 𝑎21

= 4 + 6 − 3 + 1 = 8 ,

𝑎22 − 𝑎12

6 − 3 3

𝑦1 =

𝑎

11

+ 𝑎22 − 𝑎12

− 𝑎21

= 4 + 6 − 3 + 1 = 8 ,

𝑎11 − 𝑎21

4 + 1 5

𝑦2 =

𝑎

11

+ 𝑎22 − 𝑎12

− 𝑎21

= 4 + 6 − 3 + 1 = 8 ,

𝑣 =

𝑎11 ∙ 𝑎22 − 𝑎21 ∙ 𝑎12

𝑎11 + 𝑎22 − 𝑎12 − 𝑎21

4 ∙ 6 + 1 ∙ 3

=

4 + 6 − 3 + 1

27

= = 3,375 , 8

*x1* = 7/8; *x4* = 1/8; *y1* = 3/8, *y2* = 5/8; *v* =27/8.

*Ответ.* Оптимальные смешанные стратегии игроков

X̅ = (7/8, 0, 0, 1/8) и 𝑌̅ = (3/8, 5/8), цена игры составляет *v* =27/8.

Данный ответ означает следующее:

Если первый игрок с вероятностью 7/8 будет применять первую стратегию, с вероятностью 1/8 четвертую и не будет использовать вто- рую и третью стратегии, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей его выигрыш в среднем составит не менее 27/8.

Если второй игрок с вероятностью 3/8 будет применять первую стратегию и с вероятностью 5/8 вторую, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей его проигрыш в среднем составит не более 27/8.

# Сведение матричной игры

**к задаче линейного программирования**

Теория игр находится в тесной связи с линейным программиро- ванием, так как каждая конечная игра двух лиц с нулевой суммой мо- жет быть представлена как задача линейного программирования и решена симплексным методом и, наоборот, каждая задача линейного программирования может быть представлена как конечная игра двух лиц с нулевой суммой. Рассмотрим игру двух лиц с нулевой суммой, заданную платежной матрицей.

𝐴 = (

𝑎11 𝑎12

𝑎 𝑎

21 22

. . . . . .

. . . 𝑎1𝑛

. . . 𝑎

2𝑛

. . . . . . ) .

𝑎𝑚1 𝑎𝑚2

. . . 𝑎𝑚𝑛

Если платежная матрица не имеет седловой точки, т.е. *a < b* и

𝛼 ≤ 𝑣 ≤ 𝛽, то решение игры представлено в смешанных стратегиях X̅ = (𝑥1, 𝑥2, . . . 𝑥𝑚 ) и 𝑌̅ = (𝑦1, 𝑦2, . . . , 𝑦𝑛, ). Применение первым игро- ком оптимальной стратегии X̅𝑖опт должно обеспечить ему при любых действиях второго игрока выигрыш не меньше цены игры.

𝑚

∑

𝑖=1

𝑎𝑖j𝑥𝑖*опт* ≥ 𝑣, j = ̅1̅̅,̅𝑛̅ . (6.10)

Первая строчка этого условия имеет вид:

𝑎11𝑥1 + 𝑎21𝑥2+ . . . +𝑎𝑚1𝑥𝑚 ≥ 𝑣, j = 1 .

Вторая строчка имеет вид:

𝑎12𝑥1 + 𝑎22𝑥2+ . . . +𝑎𝑚2𝑥𝑚 ≥ 𝑣, j = 2 .

И аналогично для всех остальных строк.

Поэтому условие (6.10) в расширенном виде запишется как:

𝑎11𝑥1 + 𝑎21𝑥2+ . . . +𝑎𝑚1𝑥𝑚 ≥ 𝑣 ,

{𝑎12𝑥1 + 𝑎22𝑥2+ . . . +𝑎𝑚2𝑥𝑚 ≥ 𝑣 ,

. . .

𝑎1𝑛𝑥1 + 𝑎2𝑛𝑥2+ . . . +𝑎𝑚𝑛𝑥𝑚 ≥ 𝑣 .

(6.10а)

Таким образом, мы пришли к задаче отыскания оптимальной стратегии игрока ***А***, для которой имеют место ограничения (6.10а).

Величина *v* неизвестна, однако можно считать, что цена иг- ры *v* > 0. Последнее условие выполняется всегда, если все элементы платежной матрицы неотрицательны, а этого можно достигнуть, при- бавив ко всем элементам матрицы некоторое положительное число.

Преобразуем систему ограничений (6.10а), разделив все члены неравенств на *v.*

𝑎11𝑡1 + 𝑎21𝑡2+ . . . +𝑎𝑚1𝑡𝑚 ≥ 1 ,

где

{𝑎12𝑡1 + 𝑎22𝑡2+ . . . +𝑎𝑚2𝑡𝑚 ≥ 1 ,

. . .

𝑎1𝑛𝑡1 + 𝑎2𝑛𝑡2+ . . . +𝑎𝑚𝑛𝑡𝑚 ≥ 1 ,

(6.11)

𝑡𝑖

= 𝑥𝑖 ≥ 0 𝑖 = ̅1̅̅,̅𝑚̅̅ . (6.12)

𝑣

По условию – 𝑥1 + 𝑥2+ . . . +𝑥𝑚 = 1 . Разделим обе части этого равенства на *v.*

𝑡1

+ 𝑡2

+ . . . +𝑡𝑚

= 1 . (6.13)

𝑣

Оптимальная стратегия X̅𝑖опт игрока ***А*** должна максимизировать

величину *v*, следовательно, функция

𝐿(𝑇̅) = ∑𝑚

𝑖=1

𝑡𝑖

(6.14)

должна принимать минимальное значение.

В итоге получена задача линейного программирования: найти минимум целевой функции (6.14) при ограничениях (6.11), причем на переменные наложено условие неотрицательности (6.12). Решая ее,

находим значения 𝑡𝑖 , 𝑖 = ̅1̅̅,̅𝑚̅̅ и величину 1/*v* , затем отыскиваются

значения 𝑥𝑖 = 𝑣 ∙ 𝑡𝑖 *.*

Аналогично для второго игрока оптимальная стратегия

𝑌̅𝑖опт должна обеспечить при любых стратегиях первого игрока проиг- рыш, не превышающий цену игры.

𝑛 j=1

∑

𝑎𝑖j𝑦jопт ≤ 𝑣, 𝑖 = ̅1̅̅,̅𝑚̅̅ . (6.15)

По той же схеме, как и для игрока А, первая строчка этого соот- ношения будет иметь вид:

𝑎11𝑦1 + 𝑎12𝑦2+ . . . +𝑎1𝑛 𝑦𝑛 ≤ 𝑣, 𝑖 = 1 .

Вторая строчка:

𝑎21𝑦1 + 𝑎22𝑦2+ . . . +𝑎2𝑛𝑦𝑛 ≤ 𝑣, 𝑖 = 2 .

Аналогично и все другие строчки.

Поэтому условие (6.15) в расширенном виде запишется как

𝑎11𝑦1 + 𝑎12𝑦2+ . . . +𝑎1𝑛 𝑦𝑛 ≤ 𝑣 ,

{ 𝑎21𝑦1 + 𝑎22𝑦2+ . . . +𝑎2𝑛𝑦𝑛 ≤ 𝑣 ,

. . .

(6.15а)

𝑎𝑚1𝑦1 + 𝑎𝑚2𝑦2+ . . . +𝑎𝑚𝑛𝑦𝑛 ≤ 𝑣 .

Таким образом, мы пришли к задаче отыскания оптимальной стратегии игрока ***В***, для которой имеют место ограничения (6.15а).

Рассмотрим задачу отыскания оптимальной стратегии игрока ***B***, для которой имеют место ограничения (6.15а).

Преобразуем систему ограничений, разделив все члены нера- венств на *v.*

𝑎11𝑠1 + 𝑎12𝑠2+ . . . +𝑎1𝑛 𝑠𝑛 ≤ 1 ,

{ 𝑎21𝑠1 + 𝑎22𝑠2+ . . . +𝑎2𝑛𝑠𝑛 ≤ 1 ,

. . .

𝑎𝑚1𝑠1 + 𝑎𝑚2𝑠2+ . . . +𝑎𝑚𝑛𝑠𝑛 ≤ 1.

(6.16)

𝑠j

= 𝑦j ≥ 0 j = ̅1̅̅,̅𝑛̅ . (6.17)

𝑣

По условию 𝑦1 + 𝑦2+ . . . +𝑦𝑛 = 1. Разделим обе части этого ра- венства на *v.*

𝑠1

+ 𝑠2

+ . . . +𝑠𝑛

= 1 . (6.18)

𝑣

Оптимальная стратегия 𝑌̅𝑖опт игрока ***В*** должна минимизировать

величину *v*, следовательно, функция

𝑍(𝑆̅) = ∑𝑛

j=1

𝑠j

(6.19)

должна принимать максимальное значение.

Получена задача линейного программирования: найти максимум целевой функции (6.19) при ограничениях (6.16), причем на перемен- ные наложено условие неотрицательности (6.17).

Таким образом, для нахождения решения игры имеем симмет- ричную пару двойственных задач линейного программирования. Можно найти решение одной из них, а решение второй находится с использованием теории двойственности.

**Пример.** Найти решение игры, заданной матрицей

4 3 4 2

𝐴 = (3 4 6 5) .

2 5 1 3

Имеем:

𝑎 = 𝑚𝑎𝑥(2, 3, 1) = 3, 𝑏 = 𝑚𝑖𝑛(4, 4, 6, 5) = 4 𝑎 < 𝑏 3 ≤ 𝑣 ≤ 4.

Игра не имеет седловой точки. Оптимальное решение следует искать в области смешанных стратегий.

Для определения оптимальной стратегии игрока ***А*** имеем сле- дующую задачу линейного программирования:

3

𝐿(𝑇̅) = ∑ 𝑡𝑖

𝑖=1

= 𝑡1 + 𝑡2 + 𝑡3 → min .

Напомним, что матрица ограничений (6.11) для первого игрока в общем виде записывается как

𝑎11𝑡1 + 𝑎21𝑡2+ . . . +𝑎𝑚1𝑡𝑚 ≥ 1 ,

𝑎12𝑡1 + 𝑎22𝑡2+ . . . +𝑎𝑚2𝑡𝑚 ≥ 1 ,

. . .

𝑎1𝑛𝑡1 + 𝑎2𝑛𝑡2+ . . . +𝑎𝑚𝑛𝑡𝑚 ≥ 1 .

Следовательно, для этой конкретной задачи она будет выглядеть

𝑎11𝑡1 + 𝑎21𝑡2 + 𝑎31𝑡3 ≥ 1 ,

𝑎12𝑡1 + 𝑎22𝑡2 + 𝑎32𝑡3 ≥ 1 ,

𝑎13𝑡1 + 𝑎23𝑡2 + 𝑎33𝑡3 ≥ 1 ,

𝑎14𝑡1 + 𝑎24𝑡2 + 𝑎34𝑡3 ≥ 1 ,

поскольку: *i = 1, 2, 3, j=1, 2, 3, 4*. Поэтому система ограничений для первого игрока примет вид:

4𝑡1 + 3𝑡2 + 2𝑡3 ≥ 1 ,

3𝑡1 + 4𝑡2 + 5𝑡3 ≥ 1 ,

{ 4𝑡1 + 6𝑡2 + 𝑡3 ≥ 1 , 2𝑡1 + 5𝑡2 + 3𝑡3 ≥ 1 ,

𝑡𝑖 ≥ 0, 𝑖 = ̅1̅̅,̅3̅ .

(6.20)

Для нахождения оптимальной стратегии игрока ***В*** имеем сле- дующую задачу линейного программирования:

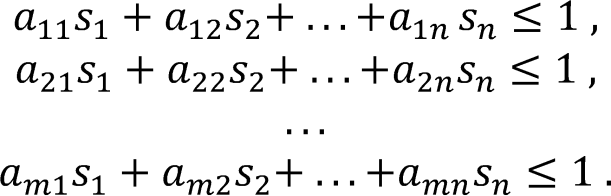
4

𝑍(𝑆̅) = ∑ 𝑠𝑖

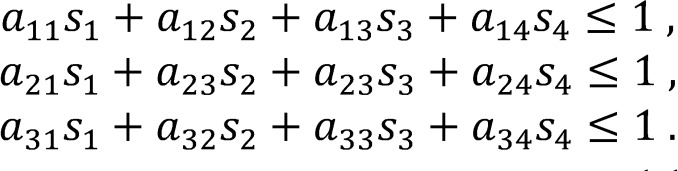
j=1

= 𝑠1 + 𝑠2 + 𝑠3 + 𝑠4 → 𝑚𝑎𝑥.

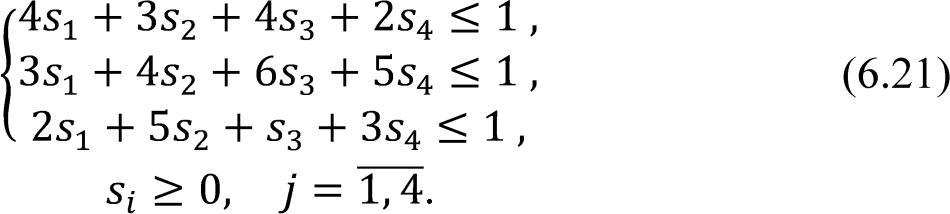
Матрица ограничений (6.16) для второго игрока в общем виде записывается как:



Для данной задачи она запишется как:



Подставив значения соответствующих коэффициентов нашей конкретной задачи, получим:



Так как число переменных больше 2, то графическим способом эти задачи линейного программирования решить невозможно. Необ- ходимо воспользоваться симплекс-методом. Но он также очень гро- моздок, тем более что в последней задаче имеем 7 ограничений, сле- довательно, необходимо и семь переменных.

Проще всего получить решение в Excel.

Запишем условие задачи линейного программирования для пер- вого игрока в Excel, как показано на рис. 6.6

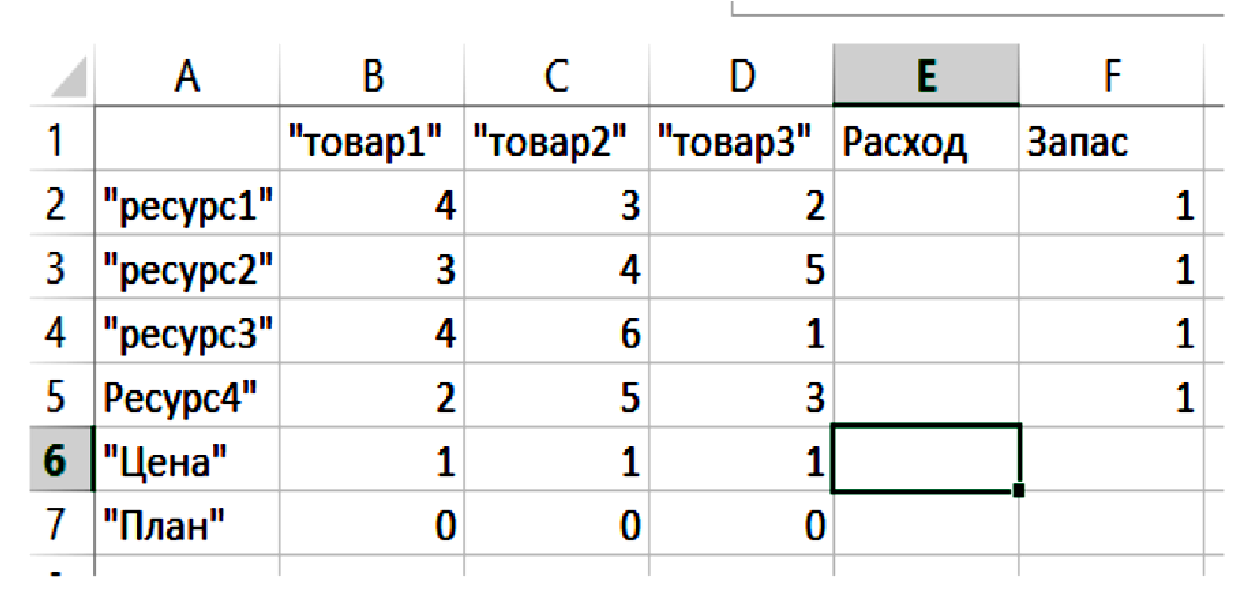


Рис. 6.6. Постановка задачи в Excel

Здесь записано условие нашей задачи: запас всех ресурсов везде одинаков и равен 1, система ограничений взята из (6.20), цены всех

«товаров» одинаковы и равны единице.

Значение целевой функции будем записывать в ячейку Е6. Выделяем эту ячейку и нажимаем символ функции . В выпадающем меню выбираем категорию – Математические и функцию – СУМПРОИЗВ. Нажимаем ОК и в выпадающем меню записываем пе- ремножаемые массивы.

В данном случае мы перемножаем массив $B$7:$D$7 (т.е. ячей- ки от В7 до D7, «План», знак $ обозначает, что это постоянные ячей- ки) на массив В6:D6, «Цена», этот массив будет меняться.

Пока курсор стоит на целевой ячейке E6, в строке высвечивается операция, которая будет совершаться в этой ячейке – СУММПРОИЗВ ($B$7:$D$7; B6:D6). Так как результат этой операции равен нулю (во всех перемножаемых ячейках стоят нули), то и в ячейке E6 высветит- ся 0. Далее мы копируем этот результат и переносим в ячейки E2–E5.

Затем курсор снова ставим в ячейку E6 и на вкладке «Данные» нажимаем кнопку «поиск решения». В выпадающем меню ещё раз указываем ячейку ЦФ – E6, указываем, в какие ячейки необходимо записывать результат (в нашем случае B7 – D7). Указываем соответ- ствующие ограничения (в нашем случае ячейки массива E2:E5 боль- ше соответствующих ячеек массива F2:F5). Также указываем, что мы ищем минимум целевой функции. Дальше нажимаем кнопку «поиск решения» и получаем результат, как показано на рис. 6.7.

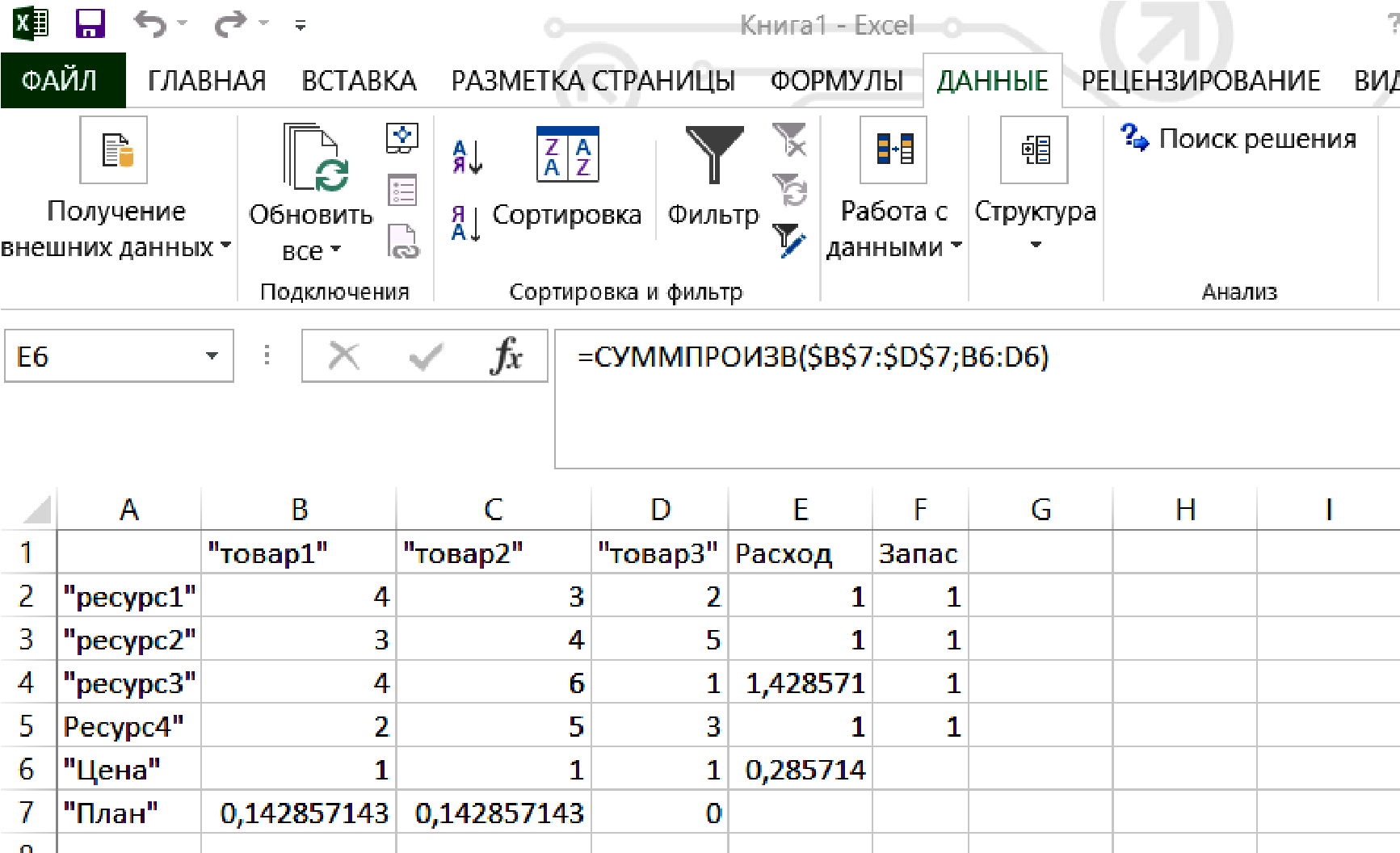


Рис. 6.7. Решение задачи в Excel

Мы видим, что оптимальный план и минимальное значение це- левой функции соответственно равны:

𝑇̅опт = (0,142857; 0,142857; 0), 𝐿𝑚𝑖𝑛 = 0,285714.

Теперь нужно вернуться к исходным переменным. В общем случае имеем.

𝑥𝑖 1

𝑡𝑖 =

𝑣 ≥ 0; 𝑖 = 1, 2, 3; 𝑡1 + 𝑡2 + 𝑡3 = 𝑣.

Используя результаты решения, запишем:

1

𝑡1 = 0,142857; 𝑡2 = 0,142857; 𝑡3 = 0; 𝑡1 + 𝑡2 = 𝑣.

Таким образом,

1 1 1

𝑣 = 𝑡

1

= = = 3,4999999997 = 3,5,

+ 𝑡2 0,142857 + 0,142857 0,2857

𝑥1 = 𝑡1 ∙ 𝑣 = 𝑡

𝑡1

+ 𝑡2

1

𝑡1

= 2𝑡

1

= 0,5; 𝑥2 = 𝑡2 ∙ 𝑣 = 𝑡

𝑡2

+ 𝑡2

1

𝑡2

= 2𝑡

2

= 0,5,

X̅ = (0,499995; 0,499995; 0).

Следовательно, если игрок А с вероятностью 0,5 будет исполь- зовать первую и вторую стратегии и не использовать третью страте- гию, то его выигрыш будет не менее 3,5.

Перейдём теперь ко второму игроку.

Матрица его ограничений представлена в (6.21). Следовательно, в Excel условие задачи для второго игрока имеет вид, как показано на рис. 6.8.



Рис. 6.8. Постановки задачи для второго игрока

Здесь записано условие нашей задачи: запас всех ресурсов везде одинаков и равен 1, система ограничений, цены всех «товаров» оди- наковы и равны единице.

Значение целевой функции будем записывать в ячейку F5. Выделяем эту ячейку и нажимаем символ функции . В выпадающем меню выбираем категорию – Математические и функцию – СУМПРОИЗВ. Нажимаем ОК и в выпадающем меню записываем пе- ремножаемые массивы.

В данном случае мы перемножаем массив $B$6:$E$6 (т.е. ячей- ки от В6 до Е6, знак $ обозначает, что это постоянные ячейки) на мас- сив В5:Е5, этот массив будет меняться.

Пока курсор стоит на целевой ячейке F5, в строке высве- чивается операция, которая будет совершаться в этой ячейке – СУММПРОИЗВ ($B$6:$E$6; B5:E5). Так как результат этой операции равен нулю (во всех перемножаемых ячейках стоят нули), то и в ячейке F5 высветится 0. Далее мы копируем этот результат и перено- сим в ячейки F2 – F4.

Затем курсор снова ставим в ячейку F5 и на вкладке «Данные» нажимаем кнопку поиск решения. В выпадающем меню ещё раз ука- зываем ячейку ЦФ – F5, указываем в какие ячейки необходимо запи- сывать результат (в нашем случае B6 – F6). Указываем соответст- вующие ограничения (в нашем случае ячейки массива F2:F4 меньше соответствующих ячеек массива G2:G4) . Дальше нажимаем кнопку поиск решения и получаем результат, как показано на рис. 6.9.

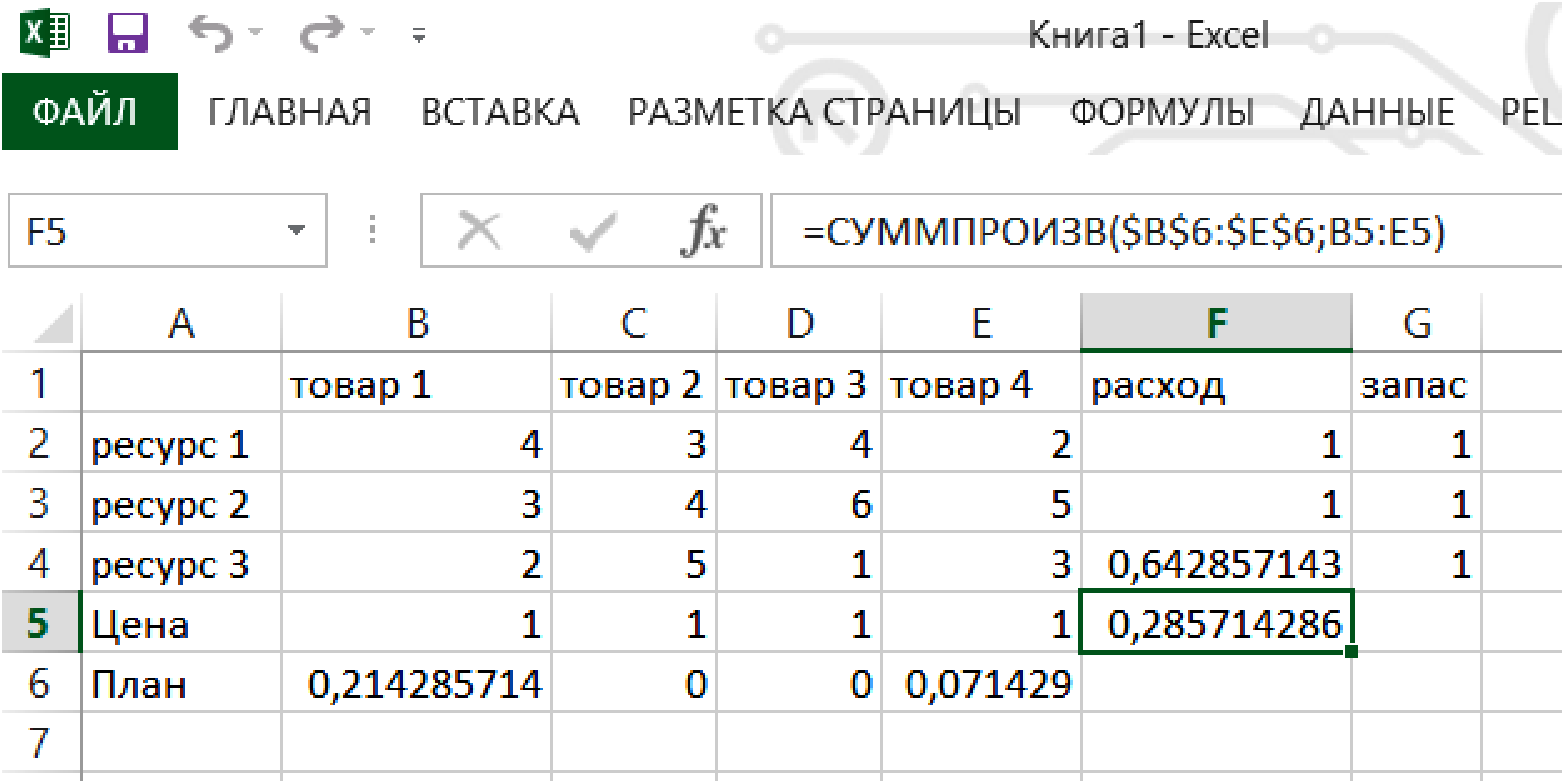


Рис. 6.9. Решения для второго игрока

Ясно, что решение выводится в десятичных дробях. Таким обра- зом, мы получили следующий результат.

Оптимальная стратегия второго игрока и цена игры равны:

𝑍̅опт = (0,214285; 0; 0; 0,071429), 𝑍𝑚𝑎𝑥 = 0,285714.

Мы видим, что 𝐿𝑚𝑖𝑛 = 𝑍𝑚𝑎𝑥 = 0,285714.

Перейдём теперь к исходным переменным. В общем случае имеем:

𝑠𝑖

= 𝑦𝑖

𝑣

и 𝑠1

+ 𝑠2

+ . . . +𝑠𝑛

= 1.

𝑣

Следовательно, конкретно для нашей задачи мы запишем:

𝑦1 = 0,21. .∙ 𝑣, 𝑦2 = 0, 3 = 0, 𝑦4 = 0,07. . .∙ 𝑣

и 𝑦1 + 𝑦2 + 𝑦3 + 𝑦4 = 𝑦1 + 𝑦4 = 1.

Из первого условия находим, что

𝑦1

𝑦4

0,214285

=

0,071429

= 2,99998 ≅ 3 .

Таким образом, получаем систему

𝑦1

{ 𝑦4

= 3,

𝑦1 + 𝑦4 = 1.

Решая эту систему, найдём:

𝑦1 = 3/4, 𝑦4 = 1/4.

дает.

Далее

𝑦1 = 0,21. .∙ 𝑣 → 𝑣 = 𝑦1/0,214285 = 3,49069 ≅ 3,5.

Мы видим, что цена игры для первого и второго игроков совпа-

В итоге можно записать оптимальную стратегию игрока ***В*** и це-

ну игры:

𝑌̅ = (3/4, 0, 0, 1/4) 𝑣 = 3,5.

Таким образом, если игрок В будет применять первую страте- гию с вероятностью 3/4, четвёртую стратегию с вероятностью 1/4 и не применять вторую и третью стратегии, то его проигрыш будет не больше чем 3,5.

# Игры с природой

В рассмотренных выше матричных играх предполагалось, что в них принимают участие два игрока, интересы которых противопо- ложны. Поэтому действия каждого игрока направлены на увеличение выигрыша (уменьшение проигрыша). Однако в некоторых задачах, приводящихся к игровым, имеется неопределенность, вызванная от- сутствием информации об условиях, в которых осуществляется дей- ствие (погода, покупательский спрос и т.д.). Эти условия зависят не от сознательных действий другого игрока, а от объективной действи- тельности. Такие игры называются играми с природой. Человек в иг- рах с природой старается действовать осмотрительно, второй игрок (природа, покупательский спрос) действует случайно.

Условия игры задаются матрицей

𝐴 = (

𝑎11 𝑎12

𝑎 𝑎

21 22

. . . . . .

. . . 𝑎1𝑛

. . . 𝑎

2𝑛

. . . . . . ).

𝑎𝑚1 𝑎𝑚2

. . . 𝑎𝑚𝑛

Пусть игрок ***А*** имеет стратегии *А1*, *А2*, …, *Аm*, а природа – со- стояния *В1*, *В2*, …, *Вn.* Наиболее простой является ситуация, когда известна вероятность *pj* каждого состояния природы *Вj.* При этом, ес- ли учтены все возможные состояния, то полная вероятность равна единице:

𝑝1 + 𝑝2+ . . . +𝑝𝑖 + . . . +𝑝𝑛 = 1.

Если игрок ***А*** выбирает чистую стратегию *Аi,* то математическое ожидание выигрыша составит

𝑝1 ∙ 𝑎𝑖1 + 𝑝2 ∙ 𝑎𝑖2+ . . . +𝑝𝑛 ∙ 𝑎𝑖𝑛.

Наиболее выгодной будет та стратегия, при которой достигается

𝑚𝑎𝑥(𝑝1 ∙ 𝑎𝑖1 + 𝑝2 ∙ 𝑎𝑖2+ . . . +𝑝𝑛 ∙ 𝑎𝑖𝑛).

𝑖

Если информация о состояниях с природой мала, то можно при- менить принцип недостаточного основания Лапласа, согласно кото- рому можно считать, что все состояния природы равновероятны:

𝑎𝑖1 + 𝑎𝑖2+ . . . +𝑎𝑖𝑛

𝑚𝑎𝑥 ,

𝑖 𝑛

т. е. стратегию, для которой среднее арифметическое элементов соот- ветствующей строки максимальное.

Имеется ряд критериев, которые используются при выборе оп- тимальной стратегии. Рассмотрим некоторые из них.

1. ***Критерий Вальда****.* Рекомендуется применять максиминную стратегию. Она выбирается из условия

𝑚𝑎𝑥 (𝑚𝑖𝑛 𝑎𝑖j)

𝑖 j

и совпадает с нижней ценой игры. Критерий является пессимистиче- ским, считается, что природа будет действовать наихудшим для чело- века способом.

1. ***Критерий максимума***. Он выбирается из условия

𝑚𝑎𝑥 (𝑚𝑎𝑥 𝑎𝑖j).

𝑖 j

Критерий является оптимистическим, считается, что природа будет наиболее благоприятна для человека.

1. ***Критерий Гурвица*.** Критерий рекомендует стратегию, опре- деляемую по формуле

𝑚𝑎𝑥 (𝛼 ∙ 𝑚𝑖𝑛 𝑎𝑖j + (1 − 𝛼) ∙ 𝑚𝑎𝑥 𝑎𝑖j),

𝑖 j j

где *a* – степень оптимизма, изменяется в диапазоне [0, 1].

Критерий придерживается некоторой промежуточной позиции, учитывающей возможность как наихудшего, так и наилучшего пове- дения природы. При α = 1 критерий превращается в критерий Вальда, при *α* = 0 – в критерий максимума. На α оказывает влияние степень ответственности лица, принимающего решение по выбору стратегии. Чем больше последствия ошибочных решений, больше желания за- страховаться, тем α ближе к единице.

1. ***Критерий Сэвиджа****.* Суть критерия состоит в выборе такой стратегии, чтобы не допустить чрезмерно высоких потерь, к которым она может привести. Находится матрица рисков, элементы которой показывают, какой убыток понесет человек (фирма), если для каждого состояния природы он не выберет наилучшей стратегии.

𝑟11 𝑟12

𝑟21 𝑟22

𝑅 = ( . . . . . .

𝑟𝑚1 𝑟𝑚2

. . . 𝑟1𝑛

. . . 𝑟2𝑛

. . . . . . ).

. . . 𝑟𝑚𝑛

Элементы матрицы рисков находятся по формуле

𝑟𝑖j = 𝑚𝑎𝑥 𝑎𝑖j − 𝑎𝑖j ,

𝑖

где max𝑖 𝑎𝑖j *–* максимальный элемент в столбце исходной матрицы.

Оптимальная стратегия определяется выражением

𝑚𝑖𝑛 (𝑚𝑎𝑥 𝑟𝑖j ).

𝑖 j

При принятии решений в условиях неопределенности следует оценивать различные варианты с точки зрения нескольких критериев. Если рекомендации совпадают, можно с большей уверенностью вы- брать наилучшее решение; если рекомендации противоречат друг другу, окончательное решение надо принимать с учетом его сильных и слабых сторон.

**Пример*.*** Возможно строительство четырех типов электростан- ций: *А1* (тепловых), *А2* (приплотинных), *А3* (бесшлюзовых), *А4* (шлю- зовых). Состояния природы обозначим через *Р1*, *Р2*, *Р*3, *Р4*. Экономи- ческая эффективность строительства отдельных типов электростан- ций изменяется в зависимости от состояния природы и задана матрицей

5 2

𝐴 = (2 3

8 5

1 4

8 4

8 12)

.

3 10

2 8

1. Согласно критерию Вальда,

𝑚𝑎𝑥 (𝑚𝑖𝑛 𝑎𝑖j) = 𝑚𝑎𝑥(2, 2, 3, 1) = 3.

𝑖 j

Поэтому следует строить бесшлюзовую электростанцию.

1. Воспользуемся критерием Сэвиджа. Построим матрицу рисков. Согласно определению, элементы матрицы рисков определяются как:

𝑟𝑖j = 𝑚𝑎𝑥 𝑎𝑖j − 𝑎𝑖j.

𝑖

Следовательно,

𝑟11 = 𝑚𝑎𝑥 𝑎𝑖j − 𝑎11 = 𝑚𝑎𝑥(5, 2, 8, 1) − 5 = 8 − 5 = 3,

𝑖

𝑟12 = 𝑚𝑎𝑥(2, 3, 5, 4) − 𝑎12 = 5 − 2 = 3,

𝑟13 = 𝑚𝑎𝑥(8, 8, 3, 2) − 𝑎13 = 8 − 8 = 0,

𝑟14 = 𝑚𝑎𝑥(4, 12, 10, 8) − 𝑎14 = 12 − 4 = 8,

𝑟21 = 𝑚𝑎𝑥(5, 2, 8, 1) − 𝑎21 = 8 − 2 = 6,

𝑟22 = 𝑚𝑎𝑥(2, 3, 5, 4) − 𝑎22 = 5 − 3 = 2,

𝑟23 = 𝑚𝑎𝑥(8, 8, 3, 2) − 𝑎23 = 8 − 8 = 0(4),

𝑟24 = 𝑚𝑎𝑥(4, 12, 10, 8) − 𝑎24 = 12 − 12 = 0,

𝑟31 = 𝑚𝑎𝑥(5, 2, 8, 1) − 𝑎31 = 8 − 8 = 0,

𝑟32 = 𝑚𝑎𝑥(2, 3, 5, 4) − 𝑎32 = 5 − 5 = 0,

𝑟33 = 𝑚𝑎𝑥(8, 8, 3, 2) − 𝑎33 = 8 − 3 = 5,

𝑟34 = 𝑚𝑎𝑥(4, 12, 10, 8) − 𝑎34 = 12 − 10 = 2,

𝑟41 = 𝑚𝑎𝑥(5, 2, 8, 1) − 𝑎41 = 8 − 1 = 7,

𝑟42 = 𝑚𝑎𝑥(2, 3, 5, 4) − 𝑎42 = 5 − 4 = 1,

𝑟43 = 𝑚𝑎𝑥(8, 8, 3, 2) − 𝑎43 = 8 − 2 = 6,

𝑟44 = 𝑚𝑎𝑥(4, 12, 10, 8) − 𝑎44 = 12 − 8 = 4.

Таким образом, матрица рисков будет иметь вид

3 3

𝑅 = (6 2

0 0

7 1

0 8

0 0).

5 2

6 4

Согласно критерию Сэвиджа, определяем

𝑚𝑖𝑛 (𝑚𝑎𝑥 𝑟𝑖j ) = 𝑚𝑖𝑛(8, 6, 5, 7) = 5,

𝑖 j

т. е. в каждой строке выбираем максимальный риск, затем среди этих максимальных рисков выбираем наименьший и смотрим, которой строке (стратегии игрока) он соответствовал.

В нашем случае минимальный из максимальных рисков это 5, который соответствует третьей строке, т.е. третьей стратегии, а имен- но, тоже бесшлюзовая плотина.

1. Воспользуемся критерием Гурвица.

𝑚𝑎𝑥 (𝛼 ∙ 𝑚𝑖𝑛 𝑎𝑖j + (1 − 𝛼) ∙ 𝑚𝑎𝑥 𝑎𝑖j).

𝑖 j j

Положим α = 1/2 = 0,5. В результате найдём:

𝑚𝑎𝑥 (0,5 ∙ 𝑚𝑖𝑛 𝑎𝑖j + 0,5 ∙ 𝑚𝑎𝑥 𝑎𝑖j) =

𝑖 j j

= 0,5 ∙ 𝑚𝑎𝑥 (𝑚𝑖𝑛 𝑎𝑖j + 𝑚𝑎𝑥 𝑎𝑖j) .

Поскольку

𝑖 j j

𝑚𝑖𝑛 𝑎𝑖j = 𝑚𝑖𝑛(2, 2, 3, 1),

j

𝑚𝑎𝑥 𝑎𝑖j = 𝑚𝑎𝑥(8, 12, 10, 8),

j

0,5 ∙ 𝑚𝑎𝑥 (𝑚𝑖𝑛 𝑎𝑖j + 𝑚𝑎𝑥 𝑎𝑖j) =

𝑖 j j

= 0,5 ∙ 𝑚𝑎𝑥((2 + 8), (2 + 12), (3 + 10), (1 + 8)) =

= 0,5 ∙ 𝑚𝑎𝑥(10, 14, 13, 9) = 0,5 ∙ 14 = 7.

Полученная семёрка соответствует второму элементу в крите- рии, так как номер элемента в критерии — это номер стратегии (ведь мы ищем *maxi*).

Поэтому по данному критерию необходимо выбрать вторую стратегию, т.е. строить приплотинную электростанцию.

1. Если принять известным распределение вероятностей для различных состояний природы, например считать эти состояния рав- новероятностными (*р1* = *р2* = *р3* = *р4* =1/4), то для принятия решения следует найти математические ожидания выигрыша:

1 1 1 1 19

𝑀1 = 5 ∙ 4 + 2 ∙ 4 + 8 ∙ 4 + 4 ∙ 4 = 4 ,

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 |  | 1 |  | 1 |  | 1 |  | 23 |
| 4  1 | + 3 ∙ | 4  1 | + 8 ∙ | 4  1 | + 12 ∙ | 4  1 | = | 4  26 |

𝑀2 = 2 ∙ ,

𝑀3 = 8 ∙ 4 + 5 ∙ 4 + 3 ∙ 4 + 10 ∙ 4 = 4 ,

1 1 1 1 15

𝑀4 = 1 ∙ 4 + 4 ∙ 4 + 2 ∙ 4 + 8 ∙ 4 = 4 .

Так как максимальное значение имеет *М3*, то следует строить бесшлюзовую электростанцию.

## ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

**Задание 6.1.** Игра, называемая «Открывание пальцев», за- ключается в следующем. Два игрока одновременно из сжатого кулака правой руки открывают по нескольку пальцев. Общее ко- личество открытых пальцев является суммой выигрыша, причем, если общее количество открытых пальцев четно, то выигрывает первый игрок, если же общее количество открытых пальцев не- четно, то выигрывает второй игрок.

Составить платежную матрицу игры.

**Задание 6.2.** Найти нижнюю и верхнюю цену игры с платёжной матрицей

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 3 | 2 | 1 | 4 |
| (10 | 4 | 3 | 10). |
| −2 | 4 | 1 | 2 |

**Задание 6.3.** Найти нижнюю и верхнюю цену игры с платёжной матрицей

𝐶 = (

2 0 −1

3 4 2 ).

−2 1 0

5 1 5

**Задание 6.4.** Пусть игра задана матрицей

C = ( ) .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 5 9 3 | | | |
| 6 | 3 | 2 | 7 |

Найти оптимальные стратегии игроков и определить цену игры.

**Задание 6.5.** Пусть игра задана матрицей

11 2

C = ( 9 6 ).

6 8

0 10

Найти оптимальные стратегии игроков и определить цену игры.

**Задание 6.6.** Зная платёжную матрицу

𝐶 = ( ),

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 9 |
| 3 4 6 7 6 | | | | |
| 7 | 6 | 10 | 8 | 11 |
| 8 | 5 | 4 | 7 | 3 |

определить верхнюю и нижнюю цены игры и найти решение игры.

**Задание 6.7.** Найти стратегии игроков А и В и цену игры, задан- ной матрицей.

С = ( ).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 3 5 2 0 | | | |
| 6 | −1 | 3 | 5 |

**Задание 6.8.** Найти решение и цену игры, заданной следующей платёжной матрицей:

12 22

.

С = ( )

32 2

**Задание 6.9.** Выполнить доминирование (упростить) и найти оптимальное решение и цену игры, заданной матрицей:

1 2 1 2

2 1 2 4

С = ( ).

3 3 2 2

4 1 3 3

**Задание 6.10.** Дана матрица игры. Привести игру к задаче ли- нейного программирования. Решить игру в смешанных стратегиях.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 2 | 4 | 8 | 5 |
| С = (6 | 2 | 4 | 6). |
| 3 | 2 | 5 | 4 |

**Задание 6.11.** Найти оптимальный вариант электростанции по критериям Лапласа, Вальда, Гурвица с показателями 0,8 и 0,3 и Сэ- виджа по заданной таблице эффективностей.

Таблица эффективностей

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Варианты | Среда | | | |
| В1 | В2 | В3 | В4 |
| А1 | 10 | 8 | 14 | 11 |
| А2 | 9 | 9 | 5 | 10 |
| А3 | 8 | 10 | 3 | 14 |
| А4 | 7 | 7 | 8 | 12 |

**Задание 6.12.** Швейное предприятие реализует свою продук- цию через магазин. Сбыт зависит от состояния погоды. В условиях тёплой погоды предприятие реализует ***a*** костюмов и ***b*** платьев, а при плохой погоде – ***c*** костюмов и ***d*** платьев. Затраты на изготовление од- ного костюма равны ***α0***, а платья – ***β0*** руб., цена реализации соответ-

ственно равна ***α1*** руб. и ***β1*** руб. Определить оптимальную стратегию предприятия.

***a*** = 1000, ***b*** = 2300, ***c*** = 1400, ***d*** = 700,

***α0*** = 20, ***β0*** = 5, ***α1*** = 40, ***β1*** = 12.

**Задание 6.13.** Количество возможных стратегий Получателя – 5, Плательщика – 4. Величины платежа образуют таблицу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | В1 | В2 | В3 | В4 |
| А1 | 2 | 3 | 5 | 9 |
| А2 | -2 | -4 | -2 | 7 |
| А3 | 7 | 5 | 0 | -3 |
| А4 | -1 | 6 | 1 | 2 |
| А5 | 6 | 9 | 6 | 3 |

Требуется найти наиболее выгодную чистую стратегию первого игрока, выбирающего строку (Получателя).

**Задание 6.14.** Количество возможных стратегий Получателя – 5, Плательщика – 4. Величины платежа образуют таблицу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | В1 | В2 | В3 | В4 |
| А1 | 2 | 3 | 5 | 9 |
| А2 | -2 | -4 | -2 | 7 |
| А3 | 7 | 5 | 0 | -3 |
| А4 | -1 | 6 | 1 | 2 |
| А5 | 6 | 9 | 6 | 3 |

Требуется найти наиболее выгодную чистую стратегию второго игрока, выбирающего столбец (Плательщика).

**Задание 6.15.** Для платёжной матрицы (2 9):

8 0

* найти и сравнить нижнюю и верхнюю цены игры;
* сделать вывод о существовании игры в чистых стратегиях;
* если игра имеет решение в чистых стратегиях, найти решение игры: стратегии игроков и цену игры.

**Задание 6.16.** Для данной платёжной матрицы:

* найти и сравнить нижнюю и верхнюю цены игры;
* сделать вывод о существовании решения игры в чистых стра- тегиях;
* если игра не имеет решения в чистых стратегиях, найти реше- ние игры: стратегии игроков и цену игры.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | В1 | В2 | В3 |
| А1 | 6 | 5 | 9 |
| А2 | -2 | -2 | 7 |
| А3 | 7 | 0 | -3 |

**Задание 6.17.** Для заданной платёжной матрицы требуется вы- явить стратегии, заведомо невыгодные для Получателя (игрока, вы- бирающего строку), упростить, если это возможно, платёжную мат- рицу.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А1 | 6 | 7 | 7 | 5 |
| А2 | 8 | 1 | 6 | 7 |
| А3 | 4 | -3 | 4 | 3 |

**Задание 6.18.** Для заданной платёжной матрицы требуется вы- явить стратегии, заведомо невыгодные для Плательщика (игрока, вы- бирающего столбец), упростить, если это возможно, платёжную мат- рицу.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| В1 | В2 | В3 | В4 |
| 6 | 7 | 7 | 5 |
| 8 | 1 | 6 | 7 |
| 4 | -3 | 4 | 3 |

**Задание 6.19**. Для данной платёжной матрицы требуется найти смешанные стратегии игроков и цену игры.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | В1 | В2 |
| А1 | 0 | 6 |
| А2 | 4 | 2 |

В **заданиях 6.20 – 6.49**. Для данных платёжных матриц:

* найти и сравнить нижнюю и верхнюю цену игры;
* найти решение игры: выгодные чистые стратегии игроков и цену игры.

**Задание 6.20**

0 2

6 5

**Задание 6.21**

1 5

0 4

**Задание 6.22**

4 5

7 6

**Задание 6.26**

8 4

1 2

**Задание 6.27**

3 4

6 5

**Задание 6.28**

7 8

4 5

**Задание 6.23**

4 5

3 7

**Задание 6.24**

6 9

3 7

**Задание 6.25**

6 1

8 4

**Задание 6.29**

9 3

7 1

**Задание 6.30**

3 7

2 6

**Задание 6.31**

5 6

9 8

**Задание 6.32**

9 7

3 4

**Задание 6.33**

7 0

4 3

**Задание 6.34**

7 4

6 0

**Задание 6.35**

1 4

9 7

**Задание 6.36**

4 5

0 8

**Задание 6.37**

4 3

9 2

**Задание 6.38**

9 6

5 2

**Задание 6.39**

7 2

8 1

**Задание 6.40**

2 4

9 5

**Задание 6.41**

9 1

8 6

**Задание 6.42**

9 5

7 2

**Задание 6.43**

3 5

6 8

**Задание 6.44**

7 6

1 0

**Задание 6.45**

5 9

2 4

**Задание 6.46**

3 2

6 5

**Задание 6.47**

7 1

9 8

**Задание 6.48**

5 4

6 0

**Задание 6.49**

4 1

9 8

# Литература

1. Акор Р. Основы исследования операций / Р. Акор, М. Сашени. – М.: Мир, 1971, – 421 с.
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. – М.: Высш. шк., 1986.
3. Банди Б. Основы линейного программирования / Б. Банди. – М.: Радио и связь, 1989.
4. Вагнер Р. Основы исследования операций: в 3х т.: пер. с англ. / Р. Вагнер. – М.: Мир, 1973.
5. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, ме- тодология / Е.С. Вентцель. – М.: Наука, 1980.
6. Венцель Е.С. Элементы теории игр / Е.С. Венцель. – М, 1961.
7. Волков И.К. Исследование операций / И.К. Волков, Е.А. Заго- руйко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
8. Высшая математика для экономистов / Под ред. Н.Ш. Креме- ра. – М.: Банки и биржи: ЮНИТИ, 1997.
9. Горелик В.А. Исследование операций / В.А. Горелик, И.А. Ушаков. – М.: Машиностроение, 1986.
10. Горчаков А.А. Компьютерные экономико-математические модели / А.А. Горчаков, И.В. Орлова. – М.: Компьютер: ЮНИТИ, 1995.
11. Исследование операций / Под ред. М.А. Войтенко и

Н.Ш. Кремера. – М.: Экон. образование, 1992.

1. Исследование операций: В 2х т.; пер. с англ. / Под ред. Дж. Маудера, С. Элмаграби. – М.: Мир, 1981, т.1 – 712 с. Т.2 – 677 с.
2. Калашникова Т.В. Исследование операций в экономике / Т.В. Калашникова. – Томск: Изд-во Том. политехн. ун-та, 2011.
3. Надеждин Е.Н. Математические методы и модели в эконо- мике: учеб. пособие / Е.Н. Надеждин, Е.Е. Смирнова, В.С. Варзаков. – Тула: Автономная некоммерческая организация ВПО «Институт эко- номики и управления», 2011. – 249 с.
4. Петросян Л.А. Теория игр: учеб. пособие для университетов

/ Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.А. Семина. – М.: Высш. шк.; Книжный дом «Университет», 1998. – 304с.

1. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах / В.М. Тихомиров. – М.: Наука, 1986.

Учебное издание

**Малхасян** Анастасия Еноковна,

**Федосеева** Людмила Вениаминовна

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

Редактор А.А. Литвинова

Компьютерная обработка: И.В. Кикичева

В печать 05.04.2018 г.

Формат 60×84/16. Объём 13,6 усл. п.л. Тираж 100 экз. Заказ № 102. Цена свободная.

Издательский центр ДГТУ

Адрес университета и полиграфического предприятия: 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

217